ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑΣ, ΙΣΤΟΡΙΑΣ
ΚΑΙ ΘΕΩΡΙΑΣ ΤΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΦΙΛΟΣΟΦΙΑΣ – ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΗΣ & ΨΥΧΟΛΟΓΙΑΣ

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΥΠΡΟΥ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ ΑΓΩΓΗΣ

Διαπανεπιστημιακό – Διατμηματικό Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών
"ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΚΑΙ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ"

«Σχέση Μαθηματικών και Μουσικής μέσω Αρχαίων Ελληνικών Κειμένων»

Επιμέλεια: **Γαϊτάνη Αντωνία**

Αριθμός Μητρώου: **Δ200610**

Η παρούσα Διπλωματική Εργασία

εκπονήθηκε στα πλαίσια των σπουδών

για την απόκτηση του

Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης

που απονέμει το

Διαπανεπιστημιακό – Διατμηματικό Πρόγραμμα Μεπταπτυχιακών Σπουδών

«Διδακτική και Μεθοδολογία των Μαθηματικών»

Εγκρίθηκε την ……………………από Εξεταστική Επιτροπή αποτελούμενη από τους :

Ονοματεπώνυμο	Βαθμίδα	Υπογραφή
1)……………………………………(επιβλέπων Καθηγητής)	…………………	……………..
2)………………………………………………	…………………	……………..
3)………………………………………………	…………………	……………..

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η σημασία της μουσικής για την καθημερινή ζωή των αρχαίων Ελλήνων είναι αναμφισβήτητη. Οι πληροφορίες που αντλούμε από τους μουσικογράφους αλλά και από μια πληθώρα άλλων πηγών της αρχαίας ελληνικής γραμματείας (κείμενα φιλοσοφικά, ιστορικά, ποιητικά και άλλα) είναι υπεραρκετές για να πειστούμε ότι δεν υπήρχε καμία εκδήλωση της ζωής των αρχαίων Ελλήνων που να μην συνοδευόταν από μουσική. Όλες οι θρησκευτικές τελετές – θυσίες, σπονδές, πομπές – είχαν τα τραγούδια τους. Στις μεγάλες γιορτές γίνονταν παραστάσεις δράματος, όπου συμμετείχαν πολλοί μουσικοί. Ακόμη και στους αθλητικούς αγώνες συχνά υπήρχαν παράλληλοι μουσικοί διαγωνισμοί. Αλλά και οι στιγμές της ιδιωτικής ζωής των πολιτών δεν ήταν χωρίς μουσική. Υπήρχαν ειδικά τραγούδια για τα πολύ σημαντικά γεγονότα της ζωής, όπως είναι ο γάμος ή ο θάνατος, αλλά και για καθημερινές ασχολίες, όπως οι αγροτικές εργασίες, ή για εξαιρετικές περιπτώσεις, όπως τα συμπόσια. Η μουσική ήταν πανταχού παρούσα.

Αν και μέσα από μια πληθώρα θεωρητικών κειμένων μπορούμε να αντλήσουμε πολλές πληροφορίες για το είδος και τη δομή της αρχαίας ελληνικής μουσικής, μας λείπει το πιο ουσιαστικό, η ίδια η μουσική, αφού έχει χαθεί ο ήχος, στοιχείο απολύτως απαραίτητο για την ύπαρξή της.

Ωστόσο, κρίνεται σκόπιμο να διευκρινίσουμε σε τι είδους μουσική αναφερόμαστε, μια και η αντίληψη που είχαν οι αρχαίοι Έλληνες για τη μουσική δεν ταυτίζεται με αυτή που έχουμε εμείς σήμερα. Όταν μιλάμε για μουσική στη δυτικοευρωπαϊκή παράδοση, σκεφτόμαστε κατά πρώτο λόγο την οργανική μουσική που συνοδεύει κάποιο τραγούδι. Τέτοιου είδους μουσική, τουλάχιστον μέχρι και την εποχή του Πλάτωνα, ήταν αδιανόητη. Γι΄ αυτούς, ο όρος «μουσική» είχε πολύ ευρύτερο περιεχόμενο και αναφερόταν σε ένα είδος τέχνης που ήταν συνδυασμός λόγου, μελωδίας και κίνησης. Η αλληλεπίδραση της μουσικής και της ποίησης ήταν τόσο μεγάλη και τόσο ζωντανή για τους Έλληνες, ώστε η εσωτερική συνένωση της τέχνης του ήχου και της ποίησης αποτελεί την ουσιαστική έννοια της μουσικής. «Μουσική», επομένως, ήταν μια πρωταρχική και αδιάλυτη ενότητα μουσικής και λόγου στο στίχο, φαινόμενο που σήμερα δεν υπάρχει πια. Από την άλλη μεριά, όταν σήμερα μιλάμε για μουσική, έχουμε κατά νου τρία δομικά στοιχεία: τη μελωδία, το ρυθμό και την αρμονία. Ωστόσο, στην αρχαία ελληνική μουσική συμπεριλαμβάνονταν ο ρυθμός και η μελωδία, αλλά όχι η αρμονία με τη νεότερη σημασία του όρου.

Στην παρούσα εργασία, θα προσπαθήσουμε να δώσουμε μια εικόνα για την αντίληψη που είχαν οι ίδιοι οι αρχαίοι Έλληνες για τη μουσική, όχι όμως ανατρέχοντας στις πληροφορίες των θεωρητικών της μουσικής, για την κατανόηση των οποίων θα απαιτούνταν εξειδικευμένες γνώσεις. Αυτό θα γίνει μέσα από το πρίσμα των διαμορφωτών της κοινής γνώμης της εποχής, των φιλοσόφων, με σαφή εστίαση στους Πυθαγορείους, οι οποίοι ήταν οι πρώτοι που έθεσαν τις βάσεις για μια ουσιαστική συζήτηση για τη μουσική.

Οι ρίζες των ελληνικών επιστημών της ακουστικής και των αρμονικών φτάνουν στον $5^{ο}$ π.Χ. αιώνα, ίσως ως και τον $6^{ο}$. Οι Πυθαγόρειοι δεν μελετούσαν τη μουσική για την ίδια τη μουσική. Οι έρευνές τους πάνω στις αρμονικές προέκυψαν από την πεποίθηση ότι το σύμπαν βρίσκεται σε τάξη, ότι η τελειότητα της ανθρώπινης ψυχής εξαρτάται από αυτή την αντίληψη και την προσαρμογή του ανθρώπου στην τάξη αυτή και, τέλος, ότι το κλειδί για την κατανόηση της φύσης του σύμπαντος είναι ο αριθμός. Όσον αφορά τη μουσική, αυτή υπεισέρχεται στην παραπάνω θεώρηση με την ανακάλυψη ότι οι σχέσεις μεταξύ των νοτών μιας μελωδίας μπορούν να εκφρασθούν μέσα από μια πολύ απλή μαθηματική φόρμουλα. Τα μήκη δύο τμημάτων μιας χορδής τα οποία δίνουν νότες που διαφέρουν κατά μια οκτάβα είναι σε λόγο 2:1, ενώ ο λόγος 4:3 παράγει μια τετάρτη και ο 3:2 μια πέμπτη. Αυτές οι βασικές αρμονικές σχέσεις είναι ταυτόχρονα βασικές μαθηματικές σχέσεις και ενισχύουν τη θέση ότι όλα τα αρμονικά διαστήματα είναι τέτοια, λόγω των μαθηματικών τους ιδιοτήτων. Επομένως, η τάξη που υπάρχει στη μουσική είναι μαθηματική τάξη και οι αρχές που τη διέπουν είναι κι αυτές μαθηματικές. Ακόμη, από τη στιγμή που αυτές οι αρχές οικοδομούν ένα όμορφο και ικανοποιητικό σύστημα οργάνωσης, ίσως είναι αυτές οι μαθηματικές σχέσεις - ή κάποια επέκτασή τους - που κρύβεται πίσω από την αξιοθαύμαστη τάξη του κόσμου και της ανθρώπινης ψυχής.

Για τους περισσότερους «Πυθαγόρειους» συγγραφείς, η μελέτη των νοτών είναι μέρος μιας πολύ μεγαλύτερης μελέτης και σχεδιάστηκε για να δείξει πώς οι ίδιες αρχές διέπουν τις αρμονικές σχέσεις μεταξύ των στοιχείων όλων των σημαντικών δομών στον κόσμο. Το σύμπαν και τα μέρη αυτού είναι όλα μέρη ενός σχεδίου που διέπεται από μαθηματική τάξη. Αυτή η ιδέα προσεγγίστηκε με πολλούς και διαφορετικούς τρόπους, αλλά οι διάφορες μελέτες του Φιλόλαου, του Αρχύτα, του Πλάτωνα, του Θέωνα, του Νικόμαχου προέρχονται όλες από την ίδια πεποίθηση: στα μαθηματικά και ιδιαιτέρως στις μαθηματικές αρμονικές βρίσκεται το κλειδί για τη λογική οργάνωση του σύμπαντος.

Πέρα από τις έννοιες του αριθμού, της αρμονίας και της «μουσικής των σφαιρών», όπως αυτές προκύπτουν μέσα από τα αρχαία ελληνικά κείμενα, ο αναγνώστης θα έχει την ευκαιρία να αντλήσει πληροφορίες για τη σύνδεση της μουσικής με την ασυμμετρία, όπως αυτή μελετήθηκε και παρουσιάστηκε από τον καθηγητή Σ. Νεγρεπόντη. Πιο συγκεκριμένα, ο Σ. Νεγρεπόντης επιχειρηματολογεί για το γεγονός ότι η απόδειξη της αρρητότητας του $\sqrt{2}$ είναι ειδικής φύσεως και διαφορετική από αυτή που εμείς γνωρίζουμε. Στη συνέχεια, στηρίζει την άποψη ότι η πρώιμη αριθμητική θεωρία των λόγων σχετίζεται άμεσα με τα ακουστκά πειράματα, ενώ παρακάτω εξηγεί πώς η προσπάθεια εύρεσης ενός κοινού μουσικού μέτρου οδήγησε, μέσω της άπειρης ανθυφαιρετικής διαδικασίας, στο συμπέρασμα ότι το διάστημα μιας οκτάβας κι αυτό του «διαπέντε» είναι ασύμμετρα, σύμφωνα με τον ορισμό 2, στο βιβλίο Χ των «*Στοιχείων*» του Ευκλείδη. Τέλος, συσχετίζει τα δύο μουσικά μέτρα (τόνος, δίεση) και την αρμονική ανθυφαίρεση με τα δύο γεωμετρικά μέτρα (διαγώνιος, πλευρά) και τη γεωμετρική ανθυφαίρεση, μεταφέροντας έτσι τη μέθοδο της ανθυφαίρεσης από την αρμονία στη γεωμετρία.

Επίσης, στην παρούσα εργασία θα έχει κανείς τη ευκαιρία να πληροφορηθεί για τις σωζόμενες διηγήσεις, οι οποίες μαρτυρούν το γεγονός ότι η αρχική ιδέα για τη μαθηματική τεκμηρίωση της μουσικής προήλθε από τον ίδιο τον Πυθαγόρα. Ένα επιπλέον στοιχείο που παρατίθεται, είναι η κατασκευή της πυθαγόρειας μουσικής κλίμακας και το πέρασμα από την επτάχορδη στην οκτάχορδη λύρα, όπως επίσης και ο χωρισμός της οκτάβας σε τόνους και διέσεις από τον Φιλόλαο. Μια ακόμη εκδοχή κατασκευής της μουσικής κλίμακας, αυτή τη φορά με τη βοήθεια των μέσων, παρέχεται από τον Ε. Σταμάτη και καταγράφεται στις σελίδες αυτής της εργασίας.

Τέλος, στις επόμενες σελίδες, θα παρουσιάσουμε την *«Κατατομή Κανόνος»*, ένα έργο κατά πάσα πιθανότητα του Ευκλείδη, όπως αυτό αποδόθηκε από τον καθηγητή Χ. Σπυρίδη, καθώς και κάποια σχόλια και παρατηρήσεις του ιδίου αλλά και άλλων σύγχρονων μελετητών, όπως ο Andrew Barker και ο Andrew Barbera. Πρόκειται για ένα έργο που δείχνει πώς οι προτάσεις των αρμονικών μπορούν να αποδειχθούν ως μαθηματικά θεωρήματα, δεδομένων κάποιων υποθέσεων σχετικά με τη φυσική διάσταση των μουσικών φαινομένων.

ΠΥΘΑΓΟΡΕΙΟΙ, ΑΡΙΘΜΟΣ ΚΑΙ ΑΡΜΟΝΙΑ

Η Πυθαγόρεια Ταξινόμηση των Μαθηματικών Επιστημών κατά τον Πρόκλο

Κατά τον Πρόκλο, οι Πυθαγόρειοι χώριζαν την επιστήμη των μαθηματικών σε τέσσερις κατηγορίες: την Αριθμητική, τη Μουσική, τη Γεωμετρία και την Αστρονομία. Το τετράπτυχο αυτό αποτελούσε το φημισμένο «Τετραόδιο» (λατινικά «Quadrivium»). Από αυτές, η Αριθμητική και η Μουσική σχετίζονταν με την ποσότητα, ενώ η Γεωμετρία και η Αστρονομία με το μέγεθος. Από τη μεν Αριθμητική και τη Μουσική, η πρώτη αφορούσε στην ποσότητα την ίδια και η δεύτερη στην ποσότητα σε σχέση με άλλες ποσότητες. Από τη δε Γεωμετρία και την Αστρονομία, η πρώτη είχε να κάνει με στάσιμα μεγέθη, ενώ η δεύτερη με κινούμενα.

Ο Πρόκλος αναφέρεται στον Τίμαιο του Πλάτωνα και στο γεγονός ότι ο Δημιουργός έφτιαξε την ψυχή μέσα από την ομοιότητα και τη διαφορετικότητα, χρησιμοποιώντας ταυτόχρονα ηρεμία και κίνηση. Ακόμη, παραλληλίζει τη μεν δημιουργία της ψυχής με αυτή της Αριθμητικής, καθώς θεωρεί την τελευταία αποτέλεσμα της διαφορετικότητας των λόγων, τους δε δεσμούς που τους ενώνουν με τη Μουσική. Για το λόγο αυτό, η Αριθμητική προηγείται της Μουσικής.

Επιπλέον, από τη στιγμή που υπάρχει η Αριθμητική, υπάρχουν και οι δράσεις της, δηλαδή η Γεωμετρία, η κίνηση της οποίας παράγει την Αστρονομία. Όπως η ακινησία προηγείται της κίνησης, έτσι και η Γεωμετρία προηγείται της Αστρονομίας.

Στα σχόλιά του στο Βιβλίο Ι των Στοιχείων του Ευκλείδη, ο Πρόκλος ταξινομεί τις μαθηματικές επιστήμες ως εξής:

«Ἀλλὰ τούτων μὲν ἅδην, περὶ δὲ τῶν εἰδῶν τῆς μαθηματικῆς μετὰ ταῦτα διοριστέον, τίνα τε καὶ πόσα τὸν ἀριθμόν ἐστιν»

[Καλό θα ήταν να διακρίνουμε τα είδη των μαθηματικών επιστημών και να ορίσουμε ποια και πόσα είναι]

«μετὰ γὰρ τὸ ὅλον καὶ παντελὲς αὐτῆς γένος δεῖ δή που καὶ τὰς τῶν μερικωτέρων ἐπιστημῶν κατ' εἴδη διαφορὰς ἀναλογίσασθαι»

[Διότι μετά τη γενική τους μορφή είναι αναγκαίο να αναλογιστεί κανείς τις πολύ συγκεκριμένες διαφορές μεταξύ των ειδικών επιστημών]

«τοῖς μὲν οὖν Πυθαγορείοις ἐδόκει τετραχὰ διαιρεῖν τὴν ὅλην μαθηματικὴν ἐπιστήμην, τὸ μὲν αὐτῆς περὶ τὸ ποσόν, τὸ δὲ περὶ τὸ πηλίκον ἀφορίζουσι καὶ τούτων ἑκάτερον διττὸν τιθεμένοις»

[Οι Πυθαγόρειοι θεωρούσαν ότι όλη η μαθηματική επιστήμη διαιρούταν σε τέσσερα μέρη: τα ξεχώρισαν κατά το ήμισυ σε αυτά που αφορούσαν στην ποσότητα [ποσόν] και κατά το άλλο ήμισυ σε αυτά που αφορούσαν στο μέγεθος [πηλίκον]]

«τό τε γὰρ ποσὸν ἢ καθ' αὑτὸ τὴν ὑπόστασιν ἔχειν, ἢ πρὸς ἄλλο θεωρεῖσθαι κατὰ σχέσιν, καὶ τὸ πηλίκον ἢ ἑστὼς ἢ κινούμενον εἶναι»

[Και καθένα από αυτά το χώριζαν σε δύο μέρη. Μια ποσότητα μπορεί να θεωρηθεί σε σχέση με τον ίδιο της το χαρακτήρα ή σε σχέση με μια άλλη ποσότητα, τα δε μεγέθη είτε ως στάσιμα ή ως κινούμενα]

«καὶ τὴν μὲν ἀριθμητικὴν τὸ καθ' αὑτὸ τὸ ποσὸν θεωρεῖν, τὴν δὲ μουσικὴν τὸ πρὸς ἄλλο, γεωμετρίαν δὲ τὸ πηλίκον ἀκίνητον ὑπάρχον καὶ τὴν σφαιρικὴν τὸ καθ' αὑτὸ κινούμενον»

[Η αριθμητική μελετά την ίδια την ποσότητα, η μουσική τις σχέσεις μεταξύ των ποσοτήτων, η γεωμετρία τα μεγέθη σε ακινησία και η αστρονομία τα μεγέθη σε κίνηση]

«ἐπισκοπεῖν δ' αὖ τὸ πηλίκον καὶ ποσὸν οὔτε μέγεθος ἁπλῶς οὔτε πλῆθος ἀλλὰ τὸ καθ' ἑκάτερον ὡρισμένον»

[Οι Πυθαγόρειοι θεωρούσαν την ποσότητα και το μέγεθος όχι απλώς ως ποσότητα και μέγεθος, αλλά ορισμένα]

«τοῦτο γὰρ ἀφελούσας τῶν ἀπείρων τὰς ἐπιστήμας κατανοεῖν, ὡς οὐκ ἐνὸν τὴν καθ' ἑκάτερον ἀπειρίαν γνώσει περιλαβεῖν»

[Διότι λένε ότι οι επιστήμες μελετούν το ορισμένο αφαιρούμενο από τις άπειρες ποσότητες και τα άπειρα μεγέθη, γιατί είναι αδύνατο να κατανοηθεί η απειρία μέσα από αυτά]

«ὅταν δὲ ταῦτα λέγωσιν ἄνδρες εἰς ἅπαν σοφίας ἐληλακότες, οὔτε τὸ ποσὸν τὸ ἐν τοῖς αἰσθητοῖς ἀκούειν ἡμεῖς ἀξιώσομεν οὔτε τὸ πηλίκον τὸ περὶ τὰ σώματα φανταζόμενον»

[Από τη στιγμή που αυτός ο ισχυρισμός έγινε από ανθρώπους που έφτασαν την κορυφή της σοφίας, δεν απομένει σε μας παρά να απαιτήσουμε να μάθουμε περί ποσότητας στα αισθητά αντικείμενα και περί μεγέθους στα σώματα]

«ταῦτα γὰρ οἶμαι θεωρεῖν τῆς φυσιολογίας ἐστίν, ἀλλ' οὐ τῆς μαθηματικῆς αὐτῆς»

[Η περιοχή που εξετάζει κανείς αυτά τα θέματα, νομίζω, είναι η επιστήμη της φύσης και όχι τα ίδια τα μαθηματικά] «ἀλλ' ἐπεὶ τὴν ἕνωσιν καὶ τὴν διάκρισιν τῶν ὅλων καὶ τὴν ταυτότητα μετὰ τῆς ἑτερότητος εἰς τὴν τῆς ψυχῆς συμπλήρωσιν ὁ δημιουργὸς παρείληφεν καὶ πρὸς ταύταις στάσιν καὶ κίνησιν καὶ ἐκ τούτων αὐτὴν τῶν γενῶν ὑπέστησεν, ὡς ὁ Τίμαιος ἡμᾶς ἀνεδίδαξεν»

[Τώρα, όπως μας δίδαξε και ο Τίμαιος, ο Δημιουργός πήρε στα χέρια του την ενότητα και τη διαφορετικότητα στο σύμπαν, και το μίγμα της ομοιότητας και της διαφορετικότητας ώστε να συμπληρώσει τη φύση της ψυχής, και την κατασκεύασε μέσα από αυτά τα είδη, μαζί με ηρεμία και κίνηση]

«λεκτέον, ὅτι κατὰ μὲν τὴν ἑτερότητα τὴν αὐτῆς καὶ τὴν διαίρεσιν τῶν λόγων καὶ τὸ πλῆθος ἡ διάνοια στᾶσα καὶ νοήσασα ἑαυτὴν εν καὶ πολλὰ οὖσαν τούς τε ἀριθμοὺς προβάλλει καὶ τὴν τούτων γνῶσιν, τὴν ἀριθμητικήν»

[ας πούμε ότι οφείλεται στην ετερότητα, δηλαδή στην πολλαπλότητα και τη διαφορετικότητα των λόγων σ’ αυτή, το γεγονός ότι η κατανόηση προβάλλει τους αριθμούς και τη γνώση των αριθμών, η οποία είναι αριθμητική]

«κατὰ δὲ τὴν ἕνωσιν τοῦ πλήθους καὶ τὴν πρὸς ἑαυτὸ κοινωνίαν καὶ τὸν σύνδεσμον τὴν μουσικήν»

[Και χάρη στην ενότητα και την πολλαπλότητά της , καθώς και στην ολότητα του δεσμού που τη συγκρατεί, προβάλλει τη μουσική]

«δι' ὃ καὶ ἡ ἀριθμητικὴ πρεσβυτέρα τῆς μουσικῆς, ἐπεὶ καὶ ἡ ψυχὴ διαιρεῖται πρῶτον δημιουργικῶς, εἶθ' οὕτως συνδέδεται τοῖς λόγοις, ὡς ὁ Πλάτων ὑφηγεῖται»

[Γι’ αυτόν το λόγο η αριθμητική είναι παλαιότερη από τη μουσική, μια και η ψυχή διαιρέθηκε πρώτα από το Δημιουργό και ύστερα συνδέθηκε με τους λόγους, με τον τρόπο που εξηγεί ο Πλάτων]

«καὶ αὖ πάλιν κατὰ μὲν τὴν στάσιν τὴν ἐν αὑτῇ τὴν ἐνέργειαν ἱδρύσασα γεωμετρίαν ἀφ' ἑαυτῆς ἐξέφηνεν, καὶ τὸ εν σχῆμα τὸ οὐσιῶδες καὶ τὰς δημιουργικὰς ἀρχὰς τῶν σχημάτων πάντων, κατὰ δὲ τὴν κίνησιν τὴν σφαιρικήν»

[Επίσης, από τη στιγμή που οι δράσεις της πηγάζουν σταθερά από την ίδρυσή της, η αριθμητική παράγει τη γεωμετρία μέσα από την ίδια τη φύση της, δηλαδή το ουσιώδες σχήμα και τις δημιουργικές αρχές όλων των σχημάτων, ενώ χάρη στην κίνησή της παράγει την αστρονομία]

«κινεῖται γὰρ καὶ αὐτὴ κατὰ τοὺς κύκλους, ἕστηκεν δὲ ἀεὶ ὡσαύτως κατὰ τὰς αἰτίας τῶν κύκλων, τὸ εὐθὺ καὶ περιφερές»

[Γιατί αυτή, η ίδια, περιστρέφεται σε κύκλους αλλά παραμένει πάντα στους ίδιους, λόγω των αιτιών του κύκλου, της ευθείας γραμμής και της περιφέρειας του κύκλου]

«καὶ διὰ τοῦτο κἀνταῦθα προϋφέστηκεν ἡ γεωμετρία τῆς σφαιρικῆς ὥσπερ ἡ στάσις τῆς κινήσεως»

[Έτσι, η γεωμετρία βρίσκεται πριν την αστρονομία, καθώς η ακινησία προηγείται της κίνησης]

«Τῶν μὲν τοίνυν Πυθαγορείων ὁ λόγος οὗτος καὶ ἡ τῶν τεττάρων ἐπιστημῶν διαίρεσις»

[Αυτή, λοιπόν, είναι η θεωρία των Πυθαγορείων και η τετραμερής διαίρεση των μαθηματικών επιστημών]

<u>Η Σημασία του Αριθμού για τους Πυθαγορείους</u>

Η πυθαγόρεια άποψη για το σύμπαν βασιζόταν στην πεποίθηση ότι η ποικιλία του ανθρώπινου είδους και της ύλης οφειλόταν στους αριθμούς . Από τη στιγμή που, κατά τους Πυθαγορείους, τα πάντα συντίθονταν από αριθμούς, η εξήγηση για την ύπαρξη ενός αντικειμένου βρισκόταν σε αυτούς.

Κατά τον Φιλόλαο,

«καὶ πάντα γαμὰν τὰ γιγνωσκόμενα ἀριθμὸν ἔχοντι· οὐ γὰρ οἷόν τε οὐδὲν οὔτε νοηθῆμεν οὔτε γνωσθῆμεν ἄνευ τούτου»

[και όλα τα πράγματα που είναι γνωστά έχουν αριθμό, γιατί δεν μπορεί κανείς να σκεφτεί ή να μάθει κάτι χωρίς αυτόν]

καθώς επίσης και

«οὐ γὰρ ἧς δῆλον οὐδενὶ οὐδὲν τῶν πραγμάτων οὔτε αὐτῶν ποθ' αὐτὰ οὔτε ἄλλω πρὸς ἄλλο, εἰ μὴ ἧς ἀριθμὸς καὶ ἁ τούτω οὐσία»

[αν δεν υπήρχε ο αριθμός, τίποτα από αυτά που υπάρχουν δεν θα ήταν σαφές, είτε από μόνο του είτε σε σχέση με άλλα πράγματα]

Οι Πυθαγόρειοι αρχικά αντιμετώπιζαν τον αριθμό με συγκεκριμένο τρόπο, δηλαδή ως σχέδια με χαλίκια. Με το πέρασμα του χρόνου, όμως, ανέπτυξαν και βελτίωσαν την έννοια του αριθμού, φτάνοντάς τη στη σημερινή αφηρημένη της μορφή. Αν και είναι δύσκολο να διακρίνει κανείς τα γεγονότα από τις φανταστικές ιστορίες σε κάποιες από τις υπάρχουσες αναφορές στους Πυθαγορείους, αναγνωρίζεται γενικά το γεγονός ότι ξεκίνησαν τη θεωρία αριθμών.

Στον Αριστοτέλη και τα *Μεταφυσικά*, παρατηρούμε έντονα τη σημασία που απέδιδαν οι Πυθαγόρειοι στους αριθμούς, με ιδιαίτερη έμφαση στο διαχωρισμό τους σε άρτιους και περιττούς, σε άπειρους και πεπερασμένους:

«φαίνονται δὴ καὶ οὗτοι τὸν ἀριθμὸν νομίζοντες ἀρχὴν εἶναι καὶ ὡς ὕλην τοῖς οὖσι καὶ ὡς πάθη τε καὶ ἕξεις, τοῦ δὲ ἀριθμοῦ στοιχεῖα τό τε ἄρτιον καὶ τὸ περιττόν, τούτων δὲ τὸ μὲν πεπερασμένον τὸ δὲ ἄπειρον»

[επίσης αυτοί οι άνθρωποι προφανώς πιστεύουν ότι ο αριθμός είναι η αρχή και ως ύλη πραγμάτων που υπάρχουν, αλλά και ως γνωρίσματα αυτών και ότι τα στοιχεία των αριθμών είναι το άρτιο και το περιττό (το πρώτο άπειρο, το δεύτερο πεπερασμένο)]

«τὸ δ' ἕν ἐξ ἀμφοτέρων εἶναι τούτων (καὶ γὰρ ἄρτιον εἶναι καὶ περιττόν), τὸν δ' ἀριθμὸν ἐκ τοῦ ἑνός, ἀριθμοὺς δέ, καθάπερ εἴρηται, τὸν ὅλον οὐρανόν»

[Και ότι ο αριθμός ένα προέρχεται κι από τα δυο τους (εννοώντας ότι είναι και άρτιο και περιττό), κι από το ένα προέρχεται ο αριθμός και ότι όλος ο ουρανός, όπως προείπαμε, προέρχεται από αριθμούς]

Τα λεγόμενα του Αριστοτέλη ενισχύονται από τον Φιλόλαο:

«Περὶ φύσεως ὧν ἀρχὴ ἥδε· ‘ἁ φύσις δ' ἐν τῶι κόσμωι ἁρμόχθη ἐξ ἀπείρων τε καὶ περαινόντων, καὶ ὅλος <ὁ> κόσμος καὶ τὰ ἐν αὐτῶι πάντα’»

[Η φύση μέσα στο σύμπαν εναρμονίστηκε από άπειρα και πεπερασμένα, τόσο όλος ο κόσμος, όσο και όλα τα πράγματα σε αυτόν]

Και συνεχίζει λέγοντας:

«ἀνάγκα τὰ ἐόντα εἶμεν πάντα ἢ περαίνοντα ἢ ἄπειρα ἢ περαίνοντά τε καὶ ἄπειρα·»

[είναι απαραίτητο τα πράγματα που υπάρχουν να είναι όλα είτε άπειρα, είτε πεπερασμένα ή άπειρα και πεπερασμένα μαζί]

«ἄπειρα δὲ μόνον <ἢ περαίνοντα μόνον> οὔ κα εἴη. ἐπεὶ τοίνυν φαίνεται οὔτ' ἐκ περαινόντων πάντων ἐόντα οὔτ' ἐξ ἀπείρων πάντων, δῆλον τἆρα ὅτι ἐκ περαινόντων τε καὶ ἀπείρων ὅ τε κόσμος καὶ τὰ ἐν αὐτῶι συναρμόχθη»

[Αλλά δεν θα μπορούσαν να είναι μόνο πεπερασμένα ή μόνο άπειρα. Από τη στιγμή που είναι προφανές, τότε, ότι δεν μπορεί να είναι από πράγματα που είναι όλα πεπερασμένα ή όλα άπειρα, είναι ξεκάθαρο ότι ο κόσμος και τα πράγματα μέσα σε αυτόν εναρμονίζονται από πεπερασμένα και άπειρα] «δηλοῖ δὲ καὶ τὰ ἐν τοῖς ἔργοις. τὰ μὲν γὰρ αὐτῶν ἐκ περαινόντων περαίνοντι, τὰ δ' ἐκ περαινόντων τε καὶ ἀπείρων περαίνοντί τε καὶ οὐ περαίνοντι, τὰ δ' ἐξ ἀπείρων ἄπειρα φανέονται»

[Τα πράγματα, όπως φαίνεται στην πράξη, δείχνουν κάτι τέτοιο. Όσα από αυτά προέρχονται από πεπερασμένα, είναι πεπερασμένα. Όσα προέρχονται από πεπερασμένα και άπειρα, είναι πεπερασμένα και άπειρα. Όσα προέρχονται από άπειρα, είναι προφανώς άπειρα]

Κατά τον Πρόκλο και σύμφωνα με τα σχόλια αυτού στο Βιβλίο Ι του Ευκλείδη:

«Τὰς δὲ ἀρχὰς τῆς μαθηματικῆς ὅλης οὐσίας ἐπισκοποῦντες ἐπ' αὐτὰς ἄνιμεν τὰς διὰ πάντων τῶν ὄντων διηκούσας ἀρχὰς καὶ πάντα ἀφ' ἑαυτῶν ἀπογεννώσας, λέγω δὲ τὸ πέρας καὶ τὸ ἄπειρον»

[Για να βρει κανείς τις αρχές όλης της μαθηματικής ουσίας, πρέπει να ανατρέξει σε όλες αυτές τις αρχές οι οποίες γεννούν τα πάντα από τον εαυτό τους, δηλαδή το Πέρας και το Άπειρον]

«ἐκ γὰρ τούτων τῶν δύο πρώτων μετὰ τὴν τοῦ ἑνὸς ἀπεριήγητον καὶ τοῖς ἅπασιν ἄληπτον αἰτίαν ὑπέστη τά τε ἄλλα πάντα καὶ ἡ τῶν μαθημάτων φύσις, ἐκείνων μὲν ἀθρόως πάντα παραγουσῶν καὶ ἐξῃρημένως»

[Διότι αυτές, οι δύο υψηλότερες αρχές μετά την απερίγραπτη και ολοκληρωτικά ακατανόητη αιτιότητα του Ενός, δημιούργησαν οτιδήποτε άλλο, συμπεριλαμβανομένων και των μαθηματικών οντοτήτων]

«τῶν δὲ προιόντων ἐν μέτροις τοῖς προσήκουσι καὶ τάξει τῇ πρεπούσῃ τὴν πρόοδον καταδεχομένων, καὶ τῶν μὲν πρώτων, τῶν δὲ μέσων, τῶν δὲ τελευταίων ὑφισταμένων»

[Από αυτές τις αρχές προέρχονται όλα τα άλλα πράγματα με συλλογικό και υπερφυσικό τρόπο, αλλά καθώς αυτά προκύπτουν, εμφανίζονται σε κατάλληλες διαιρέσεις και τοποθετούνται στη σωστή σειρά, με κάποια να είναι πρώτα στην τάξη, κάποια στη μέση και κάποια στο τέλος]

«Τὰ μὲν γὰρ νοητὰ γένη κατὰ τὴν ἑαυτῶν ἁπλότητα πρώτως μετέχει τοῦ πέρατος καὶ τοῦ ἀπείρου»

[Τα αντικείμενα του νου, λόγω της έμφυτης απλότητάς τους, είναι οι πρώτοι συμμετέχοντες στο Πέρας και το Άπειρον]

«διὰ μὲν τὴν ἕνωσιν καὶ τὴν ταυτότητα καὶ τὴν μόνιμον ὕπαρξιν καὶ σταθερὰν τοῦ πέρατος ἀποπληρούμενα»

[Και αντλούν τη σύμπνοιά τους, την ταυτότητά τους και τη σταθερή και επίμονη ύπαρξή τους από το Πέρας]

«διὰ δὲ τὴν εἰς πλῆθος διαίρεσιν καὶ τὴν γεννητικὴν περιουσίαν καὶ τὴν θείαν ἑτερότητα καὶ πρόοδον τῆς ἀπειρίας ἀπολαύοντα»

[Από το Άπειρον αντλούν την ποικιλία τους, τη γεννητική ευφορία τους και τη θεία ετερότητα και πρόοδό τους]

«τὰ δὲ μαθηματικὰ πέρατος μέν ἐστιν ἔκγονα καὶ ἀπειρίας, ἀλλ' οὐ τῶν πρωτίστων μόνων οὐδὲ τῶν νοητῶν καὶ κρυφίων ἀρχῶν, ἀλλὰ καὶ τούτων, αἳ προῆλθον μὲν ἀπ' ἐκείνων εἰς δευτέραν τάξιν»

[Τα μαθηματικά είναι οι απόγονοι του Πέρατος και του Απείρου, όχι μόνο των πρωταρχικών αρχών, ούτε μόνο κρυμμένων νοητών αιτιών, αλλά και των δευτερευόντων αρχών που επακολουθούν]

«ἀπογεννᾶν δὲ μετ' ἀλλήλων ἐξαρκοῦσι τοὺς μέσους διακόσμους τῶν ὄντων καὶ τὴν ἐν αὐτοῖς ποικιλίαν»

[σε συνεργασία της μιας με την άλλη, αρκετές ώστε να παράγουν την ενδιάμεση τάξη πραγμάτων και την ποικιλία που επιδεικνύουν]

«ὅθεν δὴ καὶ ἐν τούτοις προέρχονται μὲν εἰς ἄπειρον οἱ λόγοι, κρατοῦνται δὲ ὑπὸ τῆς πέρατος αἰτίας»

[Αυτός είναι και ο λόγος που σε αυτήν την τάξη πραγμάτων υπάρχουν λόγοι που προχωρούν προς το Άπειρον, αλλά ελέγχονται από την αρχή του Πέρατος]

«ὅ τε γὰρ ἀριθμὸς ἀπὸ μονάδος ἀρξάμενος ἄπαυστον ἔχει τὴν αὔξησιν, ἀεὶ δὲ ὁ ληφθεὶς πεπέρασται»

[Διότι ο αριθμός, ξεκινώντας από τη μονάδα, είναι ικανός να αυξάνεται απεριόριστα, όμως κάθε αριθμός που επιλέγει κανείς είναι πεπερασμένος]

«καὶ ἡ τῶν μεγεθῶν διαίρεσις ἐπ' ἄπειρον χωρεῖ, τὰ δὲ διαιρούμενα πάντα ὥρισται, καὶ κατ' ἐνέργειαν πεπέρασται τὰ μόρια τοῦ ὅλου»

[Παρομοίως, οι ποσότητες είναι διαιρετές δίχως τέλος, όμως οι ποσότητες που διακρίνονται η μία από την άλλη συνδέονται όλες και τα μέρη μιας ολότητας είναι πεπερασμένα]

«καὶ τῆς μὲν ἀπειρίας οὐκ οὔσης τά τε μεγέθη πάντα σύμμετρα ἂν ἦν καὶ οὐδὲν ἄρρητον οὐδὲ ἄλογον, οἷς δὴ δοκεῖ διαφέρειν τὰ ἐν γεωμετρίᾳ τῶν ἐν ἀριθμητικῇ»

[Αν δεν υπήρχε το Άπειρον, όλες οι ποσότητες θα ήταν σύμμετρες και δεν θα υπήρχε τίποτα άρρητο ή άλογο, χαρακτηριστικά τα οποία διαφοροποιούν τη γεωμετρία από την αριθμητική]

«καὶ οἱ ἀριθμοὶ τὴν γόνιμον τῆς μονάδος δύναμιν οὐκ ἂν ἐδύναντο δεικνύναι οὐδὲ ἂν πάντας εἶχον τοὺς λόγους ἐν ἑαυτοῖς τῶν ὄντων, οἷον τοὺς πολλαπλασίους ἢ τοὺς ἐπιμορίους».

[Ούτε θα μπορούσαν οι αριθμοί να επιδείξουν τη γόνιμη δύναμη της μονάδας, ούτε θα είχαν μέσα τους όλους τους λόγους, όπως τους πολλαπλάσιους ή τους επιμόριους]

«πᾶς γὰρ ἀριθμὸς ἐξαλλάττει τὸν λόγον πρὸς τὴν μονάδα καὶ τὸν πρὸ αὐτοῦ γενόμενον ἐξεταζόμενος»

[Διότι κάθε αριθμός που εξετάζουμε είναι σε διαφορετικό λόγο με τη μονάδα και με τον αριθμό που προηγείται αυτού]

«τοῦ δὲ πέρατος ἀναιρεθέντος συμμετρία τε καὶ κοινωνία λόγων καὶ ταυτότης εἰδῶν καὶ ἰσότης καὶ ὅσα τῆς ἀμείνονός ἐστι συστοιχίας οὐκ ἄν ποτε ἐν τοῖς μαθήμασιν ἐφαίνετο»

[Κι αν έλειπε το Πέρας, δεν θα υπήρχε η συμμετρία ή η ταυτότητα των λόγων στα μαθηματικά, καμία ομοιότητα ή ισότητα χαρακτηριστικών, ούτε οτιδήποτε άλλο που να ανήκει στη συστοιχία του καλύτερου]

«οὐδ' ἂν ἐπιστῆμαι τῶν τοιούτων ἦσαν οὐδὲ καταλήψεις μόνιμοι καὶ ἀκριβεῖς»

[Δεν θα υπήρχαν καν επιστήμες που να καταπιάνονται με τέτοια ζητήματα, ούτε και σταθερές και ακριβείς έννοιες]

«ἆδεῖ τοίνυν ἀμφοτέρων τῶν ἀρχῶν ὥσπερ τοῖς ἄλλοις γένεσι τῶν ὄντων οὕτω δὴ καὶ τοῖς μαθηματικοῖς»

[Έτσι, τα μαθηματικά χρειάζονται και τις δύο αυτές αρχές, όπως και τα άλλα όντα]

«τὰ δὲ ἔσχατα καὶ ἐν ὕλῃ φερόμενα καὶ ὑπὸ τῆς φύσεως διαπλαττόμενα πάντως αὐτόθεν ἀμφοῖν μετέχοντα καταφαίνεται, τοῦ μὲν ἀπείρου κατὰ τὴν ὑποκειμένην αὐτοῖς ἕδραν τῶν εἰδῶν, τοῦ δὲ πέρατος κατὰ τοὺς λόγους καὶ τὰ σχήματα καὶ τὰς μορφάς»

[Ως προς τα κατώτερα όντα, αυτά που εμφανίζονται στην ύλη και φθείρονται από τη φύση, είναι αμέσως προφανές ότι σε αυτά παίρνουν μέρος και οι δύο αρχές, του Απείρου - που είναι η βάση που υπογραμμίζει τα είδη τους - και του Πέρατος, εξαιτίας των λόγων τους, των χαρακτηριστικών τους, των σχημάτων τους]

«᾿Αλλ᾿ ὅτι μὲν ἀρχαὶ καὶ τῶν μαθημάτων αὗται προεστήκασιν, αἳ καὶ τῶν ὄντων ἁπάντων, φανερόν»

[Είναι σαφές, τότε, ότι οι πρωταρχικές αρχές στα μαθηματικά είναι αυτές που προεδρεύουν όλων των πραγμάτων]

<u>Η Έννοια της Αρμονίας</u>

Οι σημασιολογικές αποχρώσεις της «αρμονίας», όπως αυτές αποτυπώνονται μέσα στα αρχαία κείμενα, ποικίλλουν.

Στον Όμηρο τονίζεται κυρίως η ετυμολογική διάσταση της λέξης, μέσα από την ταύτιση των εννοιών «αρμός» (που σημαίνει σύνδεσμος) και «συμφωνίας» (που είναι το αποτέλεσμα της ισορροπίας). Χαρακτηριστικά ο Όμηρος αναφέρει στην Οδύσσεια: «γόμφοισιν δ' ἄρα τήν γε καὶ ἁρμονίῃσιν ἄρασσεν», δηλαδή «ένωσε τα ξύλα της σχεδίας με ξυλόκαρφα και αρμούς» (Καϊμάκης).

Στη μουσική, αρμονία είναι η σύνδεση διαφόρων ήχων μεταξύ τους σε μια ενότητα κι αυτό γιατί ένας ήχος μόνος του δεν έχει καμία σημασία γα τη μουσική, αλλά αποκτά μουσικό νόημα όταν τον «αρμόσουμε» με κάποιον άλλο ήχο. Σταδιακά παρατηρείται μία μετατόπιση του εννοιολογικού βάρους στο αισθητικό αποτέλεσμα και κυρίως στην ποιότητα του συναισθήματος που γεννά η μουσική ακροαματική διαδικασία. Αυτή η τελευταία παρατήρηση παρακίνησε πολλούς να συσχετίσουν τη λέξη «αρμονία» με τη συμμετρική διάταξη που εμφανίζουν οι μουσικοί φθόγγοι μέσα στα όρια της οκτάβας, με αποτέλεσμα η αρμονία να φθάσει να χρησιμοποιείται ως συνώνυμο του «τρόπου», δηλαδή της κλίμακας (Νέστωρ Ταίηλορ).

Μπορούμε να πούμε πως, σ' ένα πρώτο επίπεδο, η αρμονία ταυτιζόταν με την ιδανική εικόνα που είχαν οι Αρχαίοι για τη μουσική. Για τους Αρχαίους, η μουσική είχε συλληφεί με την ευρύτερη έννοια της ετυμολογικής ρίζας «μας» ή «μους» των Αιγυπτίων, που σημαίνει «γενιά, παραγωγή, τυπική εκδήλωση ή ενεργοποίηση αυτού που ήταν εν δυνάμει». Ειδικότερα, η συγγενική προς την αιγυπτιακή δωρική εκδοχή «Μώσα» της λέξης Μούσα είναι παράγωγος του ρήματος «Μω» που σημαίνει αναζητώ, ερευνώ. Έτσι, λοιπόν, προκύπτει ότι η μουσική τόσο για τους Αιγυπτίους όσο και τους Έλληνες είχε μέγιστη φιλοσοφική αξία και αποτελούσε το μέσο ταύτισης του ανθρώπου προς τη Δημιουργική Μονάδα και το Αρχικό Εν (Νέστωρ Ταίηλορ, 2000).

Μέχρι εδώ, είδαμε την αρμονία ως ένα συνδυασμό ομοειδών πραγμάτων. Υπάρχει, ωστόσο, μια ακόμη ερμηνεία της αρμονίας, αυτή του συνδυασμού αντίθετων πραγμάτων (Καϊμάκης). Αντίθετα πράγματα στη μουσική θα μπορούσαν να θεωρηθούν οι οξείς και οι βαρείς ήχοι, οπότε αρμονία θα ήταν ο συνδυασμός σε μια μελωδία οξέων και βαρέων ήχων, όπως ισχυρίζεται ο Αριστοτέλης στο *Ethica Eudemia (Ηθικά Ευδήμεια)*:

«οὐ γὰρ ἂν εἶναι ἁρμονίαν μὴ ὄντος ὀξέος καὶ βαρέος»

[δεν μπορεί να υπάρξει αρμονία αν δεν υπάρχει οξύ και βαρύ]

ή όπως λέει ο Ιπποκράτης στο *De Diaeta (Περί Διαίτης)*:

«συντάξιες ἐκ τῶν αὐτῶν οὐχ αἱ αὐταὶ, ἐκ τοῦ ὀξέος, ἐκ τοῦ βαρέος [...] τὰ πλεῖστα διάφορα μάλιστα ξυμφέρει, καὶ τὰ ἐλάχιστα διάφορα ἥκιστα ξυμφέρει· εἰ δὲ ὅμοια πάντα ποιήσει τις, οὐκ ἔνι τέρψις»

[η αρμονία προέρχεται από το οξύ και το βαρύ [...] όσο πιο διαφορετικά είναι, τόσο πιο πολύ συμφωνούν και όσο λιγότερο διαφέρουν, τόσο λιγότερο συμφωνούν]

Χαρακτηριστικά είναι τα λόγια του Φιλολάου:

«ἁρμονία δὲ πάντως ἐξ ἐναντίων γίνεται· ἔστι γὰρ ἁρμονία πολυμιγέων ἕνωσις καὶ δίχα φρονεόντων συμφρόνησις καὶ οἱ Πυθαγορικοὶ δέ, οἷς πολλαχῆι ἕπεται Πλάτων, τὴν μουσικήν φασιν ἐναντίων συναρμογὴν καὶ τῶν πολλῶν ἕνωσιν καὶ τῶν δίχα φρονούντων συμφρόνησιν»

[Η αρμονία προέρχεται απ' όλα τα αντίθετα: γιατί η αρμονία είναι μια ενοποίηση πραγμάτων πολλαπλώς αναμεμειγμένων και μια συμφωνία πραγμάτων που διαφωνούν]

Ο Andrew Barker υποστηρίζει ότι στο σημείο αυτό φαίνεται ότι ο Φιλόλαος αποδίδει στην έννοια της αρμονίας ένα κοσμολογικό και ψυχολογικό περιεχόμενο. Η κεντρική ιδέα είναι ότι ο κόσμος και οτιδήποτε μέσα σ' αυτόν, συμπεριλαμβανομένης και της ψυχής, αποτελείται από στοιχεία ή είδη που ανήκουν σε διακριτές κατηγορίες (όπως το πέρας και το άπειρο) και που δεν μπορούν από τη φύση τους να ενωθούν ώστε να σχηματίσουν συντονισμένες ολότητες. Η ενότητα και ο συντονισμός που τα πράγματα - και όλος ο κόσμος - δείχνουν, προκύπτουν από μια τρίτη αρχή, την αρμονία, η οποία συμφιλιώνει τα άλλα δύο. Αν και ο όρος αρμονία δεν έχει μουσική χρήση – αφού σημαίνει ταίριασμα - , είναι ξεκάθαρο ότι στο μυαλό του Φιλόλαου υπήρχε μια μουσική έννοια, τουλάχιστον μεταφορικά, όπως φαίνεται παρακάτω:

«ἆπερὶ δὲ φύσιος καὶ ἁρμονίας ὧδε ἔχειῥ ἁ μὲν ἐστὼ τῶν πραγμάτων ἀίδιος ἔσσα καὶ αὐτὰ μὲν ἁ φύσις θείαν γα καὶ οὐκ ἀνθρωπίνην ἐνδέχεται γνῶσιν»

[όσον αφορά τη φύση και την αρμονία, η κατάσταση έχει ως εξής: η ύπαρξη των πραγμάτων, η οποία είναι αιώνια, και η ίδια η φύση, επιδέχονται θεία και όχι ανθρώπινη γνώση] «πλέον γα ἣ ὅτι οὐχ οἷόν τ᾽ ἦν οὐθὲν τῶν ἐόντων καὶ γιγνωσκόμενον ὑφ᾽ ἁμῶν γα γενέσθαι μὴ ὑπαρχούσας τᾶς ἐστοῦς τῶν πραγμάτων, ἐξ ὧν συνέστα ὁ κόσμος, καὶ τῶν περαινόντων καὶ τῶν ἀπείρων»

[Επίσης, δεν είναι δυνατό για κανένα από τα πράγματα που υπάρχουν και μας είναι γνωστά να έχει γίνει, αν δεν οφείλονταν στην ύπαρξη των πραγμάτων από τα οποία είναι φτιαγμένο το σύμπαν, το πέρας και το άπειρο]

«ἐπεὶ δὲ ταὶ ἀρχαὶ ὑπᾶρχον οὐχ ὁμοῖαι οὐδ᾽ ὁμόφυλοι ἔσσαι, ἤδη ἀδύνατον ἦς κα αὐταῖς κοσμηθῆναι, εἰ μὴ ἁρμονία ἐπεγένετο ὡιτινιῶν ἅδε τρόπωι ἐγένετο»

[Και μια και υπήρχαν αυτές οι αρχές, οι οποίες δεν ήταν ούτε όμοιες ούτε του ίδιου είδους, θα ήταν αδύνατο να οργανωθούν όλες μαζί αν δεν τις είχε κυριεύσει η αρμονία με οποιονδήποτε τρόπο]

«τὰ μὲν ὦν ὁμοῖα καὶ ὁμόφυλα ἁρμονίας οὐδὲν ἐπεδέοντο, τὰ δὲ ἀνόμοια μηδὲ ὁμόφυλα μηδὲ ἰσοταγῆ ἀνάγκα τᾶι τοιαύται ἁρμονίαι συγκεκλεῖσθαι, οἵαι μέλλοντι ἐν κόσμωι κατέχεσθαι»

[Τα πράγματα που ήταν όμοια ή του ίδιου είδους δεν χρειάζονταν την αρμονία. Αλλά τα πράγματα που ήταν ανόμοια, διαφορετικού είδους και ούτε καν ίσα στην τάξη χρειάζονταν την αρμονία για να τα οργανώσει, αν έπρεπε να οργανωθούν σε έναν κόσμο]

Κατά τον Barker, η Αρμονία έγινε θεότητα στην αρχαιότητα και φερόταν να είναι είτε κόρη του Άρη και της Αφροδίτης (του θεού της καταστροφής και της θεότητας της δημιουργίας, δηλαδή θεότητες αντίθετων δυνάμεων), είτε του Δία και της Ηλέκτρας. Την ίδια στιγμή, η κατανόηση της αρμονίας με μαθηματικό τρόπο άνθισε στους κύκλους του Πλάτωνα (428-348 π.Χ.) και των ακολούθων του. Ο Πλάτωνας υποστήριζε ότι αν κάποιος ήθελε να γίνει φιλόσοφος, θα έπρεπε να μελετήσει αριθμητική, γεωμετρία, αστρονομία και θεωρία της αρμονίας και, μάλιστα, σύμφωνα με τον Θέωνα τον Σμυρνέα:

«καὶ μὲν δὴ περὶ μουσικῆς ἐν τῷ αὐτῷ φησιν, ὅτι δυεῖν δεῖται ἡ τῶν ὄντων θεωρία, ἀστρονομίας καὶ ἁρμονίας· καὶ αὗται ἀδελφαὶ αἱ ἐπιστῆμαι, ὡς οἱ Πυθαγορικοί. οἱ μὲν οὖν τὰς ἀκουομένας συμφωνίας αὖ καὶ φθόγγους ἀλλήλοις ἀναμετροῦντες ἀνήνυτα πονοῦσι»

[ο Πλάτων στον «Τίμαιο» μιλά για τη μουσική επειδή, για τη μελέτη όλων αυτών που υπάρχουν, χρειάζονται δύο πράγματα, η αστρονομία και η αρμονία, οι οποίες, σύμφωνα με το δόγμα των Πυθαγορείων, είναι αδελφές επιστήμες]

Ο Θέων ο Σμυρνεύς συνεχίζει λέγοντας:

«καὶ οἱ Πυθαγορικοὶ δέ, οἷς πολλαχῇ ἕπεται Πλάτων, τὴν μουσικήν φασιν ἐναντίων συναρμογὴν καὶ τῶν πολλῶν ἕνωσιν καὶ τῶν δίχα φρονούντων συμφρόνησιν»

[οι Πυθαγόρειοι, των οποίων τα αισθήματα συχνά υιοθετεί ο Πλάτων, προσδιορίζουν τη μουσική ως μια τέλεια ένωση αντίθετων πραγμάτων, ως μια μονάδα μέσα στην πολλαπλότητα, τέλος ως τη συμφωνία μέσα στην ασυμφωνία]

«οὐ γὰρ ῥυθμῶν μόνον καὶ μέλους συντακτικήν, ἀλλ' ἁπλῶς παντὸς συστήματος· τέλος γὰρ αὐτῆς τὸ ἑνοῦν τε καὶ συναρμόζειν»

[Επειδή η μουσική δεν συναρμόζει μόνο το ρυθμό και τη διαμόρφωση της φωνής, θέτει την τάξη σε όλο το σύστημα. Η απόληξή της είναι να ενώνει και να συναρμόζει]

«καὶ γὰρ ὁ θεὸς συναρμοστὴς τῶν διαφωνούντων, καὶ τοῦτο μέγιστον ἔργον θεοῦ κατὰ μουσικήν τε καὶ κατὰ ἰατρικὴν τὰ ἐχθρὰ φίλα ποιεῖν»

[Ο Θεός επίσης είναι ο συνταιριαστής αταίριαστων πραγμάτων και το μεγαλύτερό του έργο είναι να συμβιβάζει μεταξύ τους, με τους νόμους της μουσικής και της ιατρικής, αυτά τα οποία είναι εχθροί τα μεν των δε]

«ἐν μουσικῇ, φασίν, ἡ ὁμόνοια τῶν πραγμάτων, ἔτι καὶ ἀριστοκρατία τοῦ παντός· καὶ γὰρ αὕτη ἐν κόσμῳ μὲν ἁρμονία, ἐν πόλει δ' εὐνομία, ἐν οἴκοις δὲ σωφροσύνη γίνεσθαι πέφυκε»

[Είναι επίσης με τη μουσική που η αρμονία των πραγμάτων και η διοίκηση του σύμπαντος διατηρούνται. Διότι η αρμονία είναι μέσα στον κόσμο, η καλή νομοθεσία στην πόλη και η σωφροσύνη μέσα στην οικογένεια]

«συστατικὴ γάρ ἐστι καὶ ἑνωτικὴ τῶν πολλῶν· ἡ δὲ ἐνέργεια καὶ ἡ χρῆσις, φησί, τῆς ἐπιστήμης ταύτης ἐπὶ τεσσάρων γίνεται τῶν ἀνθρωπίνων, ψυχῆς, σώματος, οἴκου, πόλεως· προσδεῖται γὰρ ταῦτα τὰ τέσσαρα συναρμογῆς καὶ συντάξεως»

[Διότι είναι συστατική και ενωτική σε πολλά. Η δε αποδοτικότητα και η χρήση αυτής της επιστήμης, λέει ο Πλάτων, παρατηρείται σε τέσσερα ανθρώπινα στοιχεία. Το πνεύμα, το σώμα, την οικογένεια και την πολιτεία. Πράγματι, αυτά τα τέσσερα πράγματα έχουν ανάγκη να είναι καλά διευθετημένα και οργανωμένα]

Οι Πυθαγόρειοι έψαχναν παντού την «τάξη», την οποία περιέγραφαν με τις αρμονίες. Χρησιμοποιούσαν, δε, τη λέξη [kosmos] («κεκοσμημένο σύμπαν»), όταν ήθελαν να αναφερθούν στην τάξη ενός αρμονικά κατασκευασμένου σύμπαντος, γεγονός το οποίο οδήγησε στη γέννηση της σημερινής έννοιας της λέξης [kosmos] (κόσμημα, διακόσμηση) (Barker).

Ο Αριστοτέλης στα *Μεταφυσικά* ισχυρίζεται τα εξής:

«"Ἐν δὲ τούτοις καὶ πρὸ τούτων οἱ καλούμενοι Πυθαγόρειοι τῶν μαθημάτων ἁψάμενοι πρῶτοι ταῦτά τε προήγαγον, καὶ ἐντραφέντες ἐν αὐτοῖς τὰς τούτων ἀρχὰς τῶν ὄντων ἀρχὰς ᾠήθησαν εἶναι πάντων»

[οι Πυθαγόρειοι αφιέρωσαν τον εαυτό τους στα μαθηματικά και θεωρούσαν τους αριθμούς στοιχεία όλων των πραγμάτων]

Επιπλέον:

«καὶ τὸν ὅλον οὐρανὸν ἁρμονίαν εἶναι καὶ ἀριθμόν»

[όλη η πλάση είναι αρμονία και αριθμός]

Επίσης, στο *De Caelo (Περί Ουρανού)*, αναφέρει ότι:

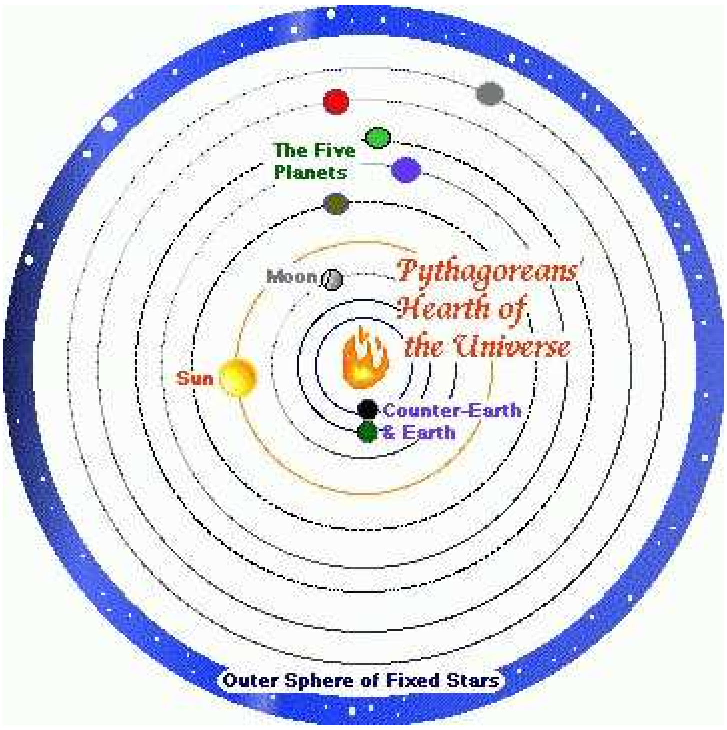
«Φανερὸν δ᾽ ἐκ τούτων ὅτι καὶ τὸ φάναι γίνεσθαι φερομένων ἁρμονίαν, ὡς συμφώνων γινομένων τῶν ψόφων»

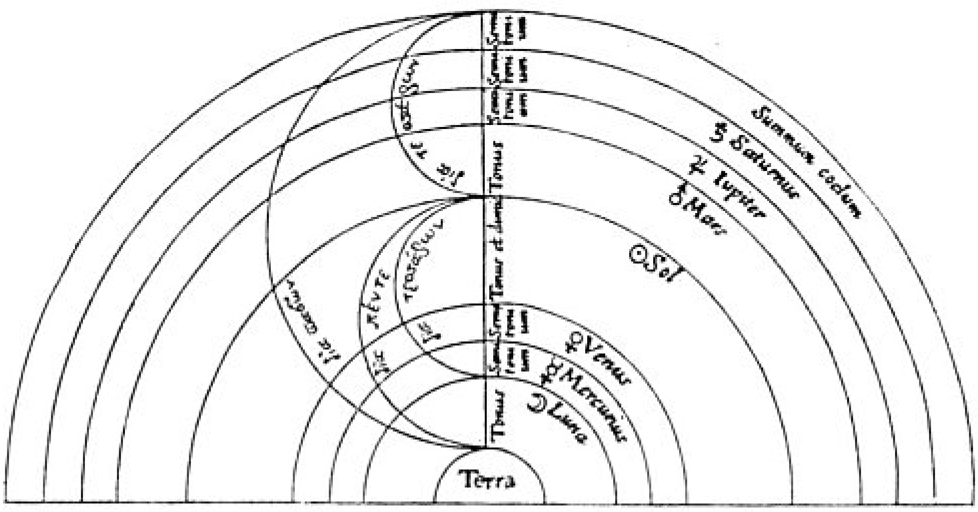
[η κίνηση των άστρων κάνει την αρμονία, όταν οι ήχοι που παράγουν είναι σύμφωνοι]

<u>Η Αρμονία των Σφαιρών</u>

Οι Πυθαγόρειοι – και ιδιαίτερα ο Φιλόλαος – είχαν την πεποίθηση ότι οι αποστάσεις μεταξύ των πλανητών έπρεπε να μετρούνται με βάση το «κεντρικό πυρ». Ο πύρινος αυτός πυρήνας, που ο Φιλόλαος αποκαλεί «σπίτι του Δία», «μητέρα των Θεών», «βωμό, δεσμό και μέτρο της Φύσης» - όπως προκύπτει από τα λεγόμενα του Αέτιου στο «*De Placitis reliquiae»*: «Φιλόλαος πῦρ ἐν μέσῳ περὶ τὸ κέντρον, ὅπερ ἑστίαν τοῦ παντὸς καλεῖ καὶ Διὸς οἶκον καὶ μητέρα θεῶν; βωμόν τε καὶ συνοχὴν καὶ μέτρον φύσεως» - αποτελούσε έναν φανταστικό άξονα γύρω από τον οποίο κινούνταν κυκλικά η Αντίχθων (Αντι – Γη), κατόπιν η Γη, μετά η Σελήνη, ύστερα ο Ήλιος, ακολούθως οι πέντε πλανήτες και, τέλος, η εξωτερική σφαίρα του σύμπαντος, η οποία έφερε τους απλανείς αστέρες.

Η φωτιά, επομένως, έρχεται πρώτη. Ὅπως επισημαίνει και ο Herbert Whone στο βιβλίο του «Το κρυφό πρόσωπο της Μουσικής», «όλα τα πράγματα κάποτε ήταν φωτιά και είναι η απώλεια αυτής της φωτιάς κατέληξε στη συμπυκνωμένη στέρεη κατάσταση της γης μας και όλων των κρύων και μορφοποιημένων τύπων ζωής. Αλλά η φωτιά, όπως και η μουσική, είναι ένα δώρο στον άνθρωπο πάνω στη γη, ένας δρόμος επιστροφής και όταν χρησιμοποιείται για να ξαναζεστάνει όσα υλικά αντικείμενα έχουν φυτρώσει και αναπτυχθεί κρύα, το αποτέλεσμα που ακολουθεί είναι να αποστάζεται και να βγαίνει από αυτά, σε κάποιο στάδιο της αλλαγής, ένα καθαρό απόσταγμα. Όπως η μουσική (το αντίγραφο στη γη ενός υψηλότερου ήχου) προκαλεί μια επιστροφή διαμέσου μιας αντήχησης που ακολουθεί, έτσι και η φωτιά, με τον τρόπο της, απομακρύνει την ακαθαρσία και οδηγεί πίσω σ' ένα καθαρό, πνευματικό επίπεδο». Η φωτιά προκαλεί καθαρότητα. Η στενή συνάφεια της αγγλικής λέξης «pure» (καθαρός) με την ελληνική λέξη «πυρ» μαρτυρεί κάτι τέτοιο (Ταίηλορ, 2000). Σχηματικά και κατά τους Πυθαγορείους ο [kosmos] είχε ως εξής:





Φαίνεται ότι οι Πυθαγόρειοι αισθάνθηκαν την ανάγκη να ερμηνεύσουν τις παλαιότερες μυθολογικές εικόνες για την ουράνια μουσική με επιστημονικά δεδομένα, χρησιμοποιώντας φυσικο - ακουστικές θεωρίες και καταφεύγοντας σε αστρονομικές παρατηρήσεις και υπολογισμούς αναφορικά με το μέγεθος, το βάρος ή την ταχύτητα των ουρανίων σωμάτων. Κλήθηκαν όμως να απαντήσουν στο εξής ερώτημα: στην περίπτωση των ουρανίων σωμάτων έχουμε να κάνουμε με πραγματικά υπαρκτή μουσική και αν ναι, γιατί δεν την ακούμε; (Καϊμάκης, 2004). Η πρώτη απόπειρα απάντησης στο παραπάνω ερώτημα έγινε από τον Αρχύτα:

«πρᾶτον μὲν οὖν ἐσκέψαντο, ὅτι οὐ δυνατόν ἐστιν ἦμεν ψόφον μὴ γενηθείσας πληγᾶς τινων ποτ' ἄλλαλα»

[παρατήρησαν πρώτοι ότι δεν μπορεί να υπάρξει ήχος, αν δεν έχει γίνει πρώτα σύγκρουση πραγμάτων μεταξύ τους]

«πλαγὰν δ' ἔφαν γίνεσθαι, ὅκκα τὰ φερόμενα ἀπαντιάξαντα ἀλλάλοις συμπέτηι»

[Έλεγαν ότι μια σύγκρουση συμβαίνει όταν πράγματα, που βρίσκονται εν κινήσει, συναντώνται και συγκρούονται]

«τὰ μὲν οὖν ἀντίαν φορὰν φερόμενα ἀπαντιάζοντα αὑτὰ αὑτοῖς συγχαλᾶντα, <τὰ> δ' ὁμοίως φερόμενα, μὴ ἴσωι δὲ τάχει, περικαταλαμβανόμενα παρὰ τῶν ἐπιφερομένων τυπτόμενα ποιεῖν ψόφον»

[Τα πράγματα τα οποία κινούνται προς αντίθετες κατευθύνσεις, όταν συναντηθούν παράγουν ήχο καθώς το ένα επιβραδύνει το άλλο, ενώ αυτά που κινούνται προς την ίδια κατεύθυνση, αλλά με διαφορετικές ταχύτητες, παράγουν ήχο όταν αυτό που ακολουθούσε προσπερνά και χτυπά εκείνο που προπορευόταν]

«πολλοὺς μὲν δὴ αὐτῶν οὐκ εἶναι ἁμῶν τᾶι φύσει οἵους τε γινώσκεσθαι, τοὺς μὲν διὰ τὰν ἀσθένειαν τᾶς πλαγᾶς, τοὺς δὲ διὰ τὸ μᾶκος τᾶς ἀφ' ἁμῶν ἀποστάσιος, τινὰς δὲ καὶ διὰ τὰν ὑπερβολὰν τοῦ μεγέθεος»

[Πολλοί από αυτούς τους ήχους δεν είναι ευδιάκριτοι από εμάς, μερικοί λόγω της αδυναμίας της σύγκρουσης, κάποιοι άλλοι εξαιτίας της μεγάλης τους απόστασης από εμάς και κάποιοι λόγω του υπερβολικά μεγάλου μεγέθους τους]

«οὐ γὰρ παραδύεσθαι ἐς τὰν ἀκοὰν ἁμῖν τὼς μεγάλως τῶν ψόφων, ὥσπερ οὐδ' ἐς τὰ σύστομα τῶν τευχέων, ὅκκα πολύ τις ἐγχέηι, οὐδὲν ἐγχεῖται.»

[γιατί οι μεγάλοι ήχοι δεν φτάνουν στα αυτιά μας, όπως τίποτα δεν περνά μέσα από το στενό λαιμό ενός αγγείου, όταν κάποιος του ρίχνει μεγάλες ποσότητες]

Τη σκυτάλη παίρνει ο Αριστοτέλης στο *De Caelo (Περί Ουρανού)*:

«Δοκεῖ γάρ τισιν ἀναγκαῖον εἶναι τηλικούτων φερομένων σωμάτων γίγνεσθαι ψόφον, ἐπεὶ καὶ τῶν παρ' ἡμῖν οὔτε τοὺς ὄγκους ἐχόντων ἴσους οὔτε τοιούτῳ τάχει φερομένων»

[φαίνεται αναπόφευκτο σε κάποιους ότι όταν τόσο μεγάλα σώματα κινούνται, πρέπει να παραχθεί ήχος, αφού έτσι συμβαίνει με τα σώματα στην περιοχή μας, τα οποία ούτε τέτοιο όγκο έχουν, ούτε με τέτοιες ταχύτητες κινούνται]

« ἡλίου δὲ καὶ σελήνης, ἔτι τε τοσούτων τὸ πλῆθος ἄστρων καὶ τὸ μέγεθος φερομένων τῷ τάχει τοιαύτην φορὰν ἀδύνατον μὴ γίγνεσθαι ψόφον ἀμήχανόν τινα τὸ μέγεθος»

[Όταν ο ήλιος και η σελήνη και τα αστέρια, τόσο μεγάλα σε αριθμό και ύλη, κινούνται με τόσο ταχεία κίνηση, τότε είναι πιθανό, λένε, ότι παράγεται ήχος υπερβολικός σε ποσότητα]

«Ὑποθέμενοι δὲ ταῦτα καὶ τὰς ταχυτῆτας ἐκ τῶν ἀποστάσεων ἔχειν τοὺς τῶν συμφωνιῶν λόγους, ἐναρμόνιον γίγνεσθαί φασι τὴν φωνὴν φερομένων κύκλῳ τῶν ἄστρων»

[Λαμβάνοντας αυτούς τους ισχυρισμούς ως υποθέσεις και υποθέτοντας επίσης ότι από τις αποστάσεις μεταξύ τους οι ταχύτητες απαιτούν τους λόγους των συμφωνιών, λένε ότι ο ήχος που παράγεται από τα αστέρια, καθώς αυτά κινούνται σε κυκλική τροχιά, είναι αρμονικός]

«Ἐπεὶ δ' ἄλογον δοκεῖ τὸ μὴ συνακούειν ἡμᾶς τῆς φωνῆς ταύτης, αἴτιον τούτου φασὶν εἶναι τὸ γιγνομένων εὐθὺς ὑπάρχειν τὸν ψόφον, ὥστε μὴ διάδηλον εἶναι πρὸς τὴν ἐναντίαν σιγήν»

[Και ο λόγος που δεν ακούμε αυτόν τον ήχο είναι, λένε, γιατί, από τη στιγμή που γεννιόμαστε, αυτός υπάρχει με τρόπο ώστε να μην είναι εμφανής σε σχέση με την απόλυτη σιγή]

«πρὸς ἄλληλα γὰρ φωνῆς καὶ σιγῆς εἶναι τὴν διάγνωσιν· ὥστε καθάπερ τοῖς χαλκοτύποις διὰ συνήθειαν οὐθὲν δοκεῖ διαφέρειν, καὶ τοῖς ἀνθρώποις ταὐτὸ συμβαίνειν»

[διότι, λένε, πως αυτός ο ήχος και η σιγή διακρίνονται μεταξύ τους με τον ίδιο τρόπο που ο σιδηρουργός δεν διακρίνει τους ήχους γιατί τους έχει συνηθίσει. Το ίδιο συμβαίνει και με το ανθρώπινο είδος]

Στην περίπτωση της μουσικής των σφαιρών, οι Πυθαγόρειοι χρησιμοποιούσαν τον όρο αρμονία πραγματικά και όχι μεταφορικά. Ως ένα είδος απόδειξης, σύμφωνα με την παράδοση, είναι το γεγονός ότι ο Πυθαγόρας είχε την εξαιρετική ικανότητα να ακούει αυτή τη μουσική (Καϊμάκης, 2004). Κάτι τέτοιο φαίνεται από τα λόγια του Πορφύριου, στο *Vita Pythagorae (Πυθαγόρου Βίος)*:

«αὐτὸς δὲ τῆς τοῦ παντὸς ἁρμονίας ἠκροᾶτο συνιεὶς τῆς καθολικῆς τῶν σφαιρῶν καὶ τῶν κατ' αὐτὰς κινουμένων ἀστέρων ἁρμονίας, ἧς ἡμᾶς μὴ ἀκούειν διὰ σμικρότητα τῆς φύσεως»

[(ο Πυθαγόρας) άκουγε την αρμονία του σύμπαντος κατανοώντας την καθολική αρμονία των σφαιρών και των αστέρων που κινούνται προς αυτές, αρμονία που εμείς δεν ακούμε λόγω της ανεπάρκειας της φύσης μας]

Ωστόσο οι Πυθαγόρειοι δεν μπορούσαν να ακούσουν αυτή την ουράνια μουσική και για να την κατανοήσουν κατέφευγαν στην επίγεια μουσική, πιστεύοντας ότι η τελευταία είναι μίμηση της πρώτης (Van der Waeden, 1979). Επομένως, οι ίδιοι νόμοι που διέπουν την επίγεια μουσική θα διέπουν και τη μουσική που παράγεται από την κίνηση των άστρων κι έτσι, γνωρίζοντας τις μαθηματικές σχέσεις της μουσικής αρμονίας, μπορούμε να τις εφαρμόσουμε για να βρούμε τις αποστάσεις και τις ταχύτητές τους. Με αυτή την έννοια ο Αρχύτας υποστηρίζει ότι:

«καλῶς μοι δοκοῦντι τοὶ περὶ τὰ μαθήματα διαγνώμεναι, καὶ οὐθὲν ἄτοπον ὀρθῶς αὐτούς, οἷά ἐντι, περὶ ἑκάστων φρονέειν·

[αυτοί που ασχολούνται με τις επιστήμες (μαθήματα) μου φαίνονται άνθρωποι εξαιρετικής οξυδέρκειας και δεν είναι παράξενο που συλλαμβάνουν συγκεκριμένα πράγματα ορθώς, όπως πραγματικά είναι]

«περὶ γὰρ τᾶς τῶν ὅλων φύσιος καλῶς διαγνόντες ἔμελλον καὶ περὶ τῶν κατὰ μέρος, οἷά ἐντι, καλῶς ὀψεῖσθαι»

[Αφού εξάσκησαν σωστή κρίση για τη φύση των όλων, ήταν πολύ πιθανό επίσης να έχουν μια καλή άποψη για τον τρόπο που παίρνονται τα πράγματα μέρος προς μέρος]

«περί τε δὴ τᾶς τῶν ἄστρων ταχυτᾶτος καὶ ἐπιτολᾶν καὶ δυσίων παρέδωκαν ἁμῖν σαφῆ διάγνω-σιν καὶ περὶ γαμετρίας καὶ ἀριθμῶν καὶ σφαιρικᾶς καὶ οὐχ ἥκιστα περὶ μωσικᾶς»

[Μας παρέδωσαν σαφή κατανόηση της ταχύτητας των ουράνιων σωμάτων, της ανατολής και της δύσης τους, της γεωμετρίας, των αριθμών, της μουσικής]

«ταῦτα γὰρ τὰ μαθήματα δοκοῦντι ἦμεν ἀδελφεά· περὶ γὰρ ἀδελφεὰ τὰ τῶ ὄντος πρώτιστα δύο εἴδεα τὰν ἀναστροφὰν ἔχει»

[Αυτές οι επιστήμες φαίνεται να είναι συγγενείς, μια και ασχολούνται με τις δύο πρωταρχικές μορφές του τι είναι, οι οποίες μορφές είναι με τη σειρά τους συγγενείς]

Της ίδιας άποψης είναι και ο Πλάτωνας, ο οποίος λέει στην *Πολιτεία*: «Κινδυνεύει, ἔφην, ὡς πρὸς ἀστρονομίαν ὄμματα πέπηγεν, ὣς πρὸς ἐναρμόνιον φορὰν ὦτα παγῆναι, καὶ αὗται ἀλλήλων ἀδελφαί τινες αἱ ἐπιστῆμαι εἶναι, ὡς οἵ τε Πυθαγόρειοί φασι».

Ο δε Αριστοτέλης, αν και δεν συμφωνεί με την ιδέα της μουσικής των σφαιρών, παραδέχεται ότι είναι μια θεωρία περίτεχνα διατυπωμένη και σύμφωνα με αυτή, ο ήχος που παράγεται είναι αρμονικός γιατί είναι σύμφωνος. Χαρακτηριστικά αναφέρει τα παρακάτω:

«Φανερὸν δ' ἐκ τούτων ὅτι καὶ τὸ φάναι γίνεσθαι φερομένων ἁρμονίαν, ὡς συμφώνων γινομένων τῶν ψόφων, κομψῶς μὲν εἴρηται καὶ περιττῶς ὑπὸ τῶν εἰπόντων».

Μετά απ’ όλα αυτά, επόμενο ήταν να συνδεθούν οι επτά νότες της οκτάβας και οι αντίστοιχες χορδές της λύρας με τους επτά πλανήτες. Σε κείμενα Νεοπυθαγορείων, όπως του Νικόμαχου, μπορεί να βρει κανείς μια τέτοια αντιστοίχιση:

«ἀλλ' ἀπὸ μὲν τοῦ κρονικοῦ κινήματος ἀνωτάτου ὄντος ἀφ' ἡμῶν ὁ βαρύτατος ἐν τῷ διὰ πασῶν φθόγγος ὑπάτη ἐκλήθη, ὕπατον γὰρ τὸ ἀνώτατον»

[από την πορεία του Κρόνου, που είναι ο υψηλότερος σε σχέση με μας, η βαθύτερη νότα στην οκτάβα ονομάστηκε «υπάτη», γιατί αυτό που είναι πιο ψηλά καλείται «ύπατον»]

«ἀπὸ δὲ τοῦ σεληνιακοῦ κατωτάτου πάντων καὶ περιγειοτέρου κειμένου νεάτη καὶ γὰρ νέατον τὸ κατώτατον»

[Από την κίνηση της Σελήνης, που είναι πιο κάτω απ’ όλα και κυκλώνει τη Γη πιο κοντά απ’ όλα, προέκυψε το όνομα «νήτη», γιατί αυτό που είναι πιο χαμηλά λέγεται έτσι]

«ἀπὸ δὲ τῶν παρ' ἑκάτερον τοῦ μὲν ὑπὸ τὸν Κρόνον, ὅς ἐστι Διὸς, παρυπάτη τοῦ δ' ὑπὲρ Σελήνην, ὅς ἐστιν Ἀφροδίτης, παρανεάτη]

[Από τις πορείες εκείνων που είναι δίπλα (παρά) σε καθένα από τους παραπάνω, προέκυψε το όνομα από τη μια «παρυπάτη» (για τον πλανήτη κάτω από τον Κρόνο, το Δία) και από την άλλη «παρανήτη» (για τον πλανήτη πάνω από τη Σελήνη, την Αφροδίτη)]

«ἀπὸ δὲ τοῦ μεσαιτάτου, ὅς ἐστιν ἡλιακοῦ τετάρτου ἑκατέρωθεν κειμένου, μέση διὰ τεσσάρων πρὸς ἀμφότερα ἄκρα ἔν γε τῇ ἑπταχόρδῳ κατὰ τὸ παλαιὸν διεστῶσα καθάπερ καὶ ὁ Ἥλιος ἐν τοῖς ἑπτὰ πλάνησιν ἑκατέρωθέν ἐστι τέταρτος, μεσαίτατος ὤν»

[Από την πορεία του Ήλιου που είναι στη μέση, ο οποίος είναι τέταρτος στη σειρά από κάθε άκρο, προέκυψε το όνομα «μέση», νότα που τοποθετείται στο διάστημα της τετάρτης κι από τα δύο άκρα, όπως ακριβώς είναι και ο Ήλιος τέταρτος από κάθε άκρο ανάμεσα στους επτά πλανήτες και βρίσκεται στη μέση]

«ἀπὸ δὲ τῶν παρ' ἑκάτερα τοῦ Ἡλίου Ἄρεος μὲν μεταξὺ Διὸς καὶ Ἡλίου τὴν σφαῖραν εἰληχότος ὑπερμέση ἡ καὶ λιχανός. Ἑρμοῦ δὲ τὸ μεταίχμιον Ἀφροδίτης καὶ Ἡλίου κατέχοντος παραμέση»

[Όσον αφορά τους πλανήτες σε κάθε πλευρά του Ηλίου, από την πορεία του Άρη στον οποίο ανήκει η σφαίρα μεταξύ του Ηλίου και του Κρόνου, η νότα ονομάστηκε «υπερμέση» ή και «λιχανός» κι από αυτή του Ερμή, ο οποίος βρίσκεται ανάμεσα στον Ήλιο και την Αφροδίτη, η νότα ονομάστηκε «παραμέση»]

Από τα παραπάνω είναι φανερό ότι τα ονόματα των νοτών προέκυψαν από την κίνηση των επτά πλανητών σε σχέση με τη γη. Έτσι έχουμε το ακόλουθο σύστημα:

ΟΥΡΑΝΙΑ ΣΩΜΑΤΑ	**ΝΟΤΕΣ**
Κρόνος	Υπάτη
Δίας	Παρυπάτη
Άρης	Λιχανός
Ήλιος	Μέση
Ερμής	Παραμέση
Αφροδίτη	Παρανήτη
Σελήνη	Νήτη

Σύμφωνα με τον Νέστωρα Ταίηλορ, εδώ ακριβώς κάνει την εμφάνισή της η πυθαγόρεια «θεωρία των αριθμών». Σύμφωνα με την αρχή αυτή, κάθε μορφή του επιστητού τηρεί κάποιες αριθμητικές αναλογίες που ερμηνεύονται με τη βοήθεια της μαθηματικής επιστήμης. Έτσι, ο αρχικά γενικευτικός ορισμός της αρμονίας συγκεκριμενοποιείται και η αρμονία αποκτά το ρόλο του εργαλείου εκείνου που μας παρέχει τη δυνατότητα να κάνουμε μεταφορικούς παραλληλισμούς ανάμεσα στη γήινη μουσική (musica humana) και την υπερκοσμική μουσική (musica mundana).

Σ' ένα δεύτερο επίπεδο, λοιπόν, η αρμονία είναι το κοινό χαρακτηριστικό της μουσικής με τα μαθηματικά. Όπως ακριβώς ο αριθμός προκύπτει από τη διαμάχη αντιθέτων, έτσι και εκείνη συνενώνει τα αντίθετα, τη μουσική και τα μαθηματικά.

Κατά τον Βέικο, «η γοητεία της σχέσης της μουσικής με τα μαθηματικά έγκειται στο ότι συνιστούν πραγματικά ιδεώδεις κόσμους στους οποίους ζούμε και μπορούμε να κατανοήσουμε με αυτούς καλύτερα τον πραγματικό κόσμο. Δημιουργώντας μουσική ή μαθηματικά, πλάθουμε έναν ιδανικό κόσμο που κυβερνούμε και απολαμβάνουμε. Ο ιδεώδης όμως αυτός κόσμος δεν δημιουργείται παρά με τις αναλογίες του πραγματικού κόσμου και έτσι βρισκόμαστε κάτω από τον έλεγχο της συγκεκριμένης αντιθετικής ή ασύμμετρης πραγματικότητας. Οι αριθμοί είναι μερικές φορές αντιφατικοί και οι νότες παράφωνες. Αυτό είναι ένα κίνητρο να δημιουργηθούν επιπλέον μαθηματικά και επιπλέον μουσική, για να αποφεύγεται η αντίφαση και η ασυμφωνία, γιατί το ανθρώπινο πνεύμα θεωρεί συνήθως την αντίφαση και την ασυμφωνία σαν εκκρεμότητα που επικαλείται την άρση της».

Η έννοια της αρμονίας διαδόθηκε ευρέως, ακόμα κι εκτός της σχολής των Πυθαγορείων. Λόγου χάρη, ο Ηράκλειτος (535-475 π.Χ.) υποστήριζε ότι «από πράγματα που διαφέρουν προκύπτει η ωραιότερη αρμονία».

Ωστόσο, για πολλούς η αρμονία έχει ποιοτική έννοια και στερείται περίπλοκων μαθηματικών ζητημάτων. Για παράδειγμα, ο μαθητής του Αριστοτέλη, Αριστόξενος (4^{ος} αιώνας π.Χ.), απέρριπτε τη σημασία των αριθμών και εστίαζε σε έννοιες όπως [η ακοή], [η αίσθηση], [η μνήμη] και [η διανοία]. Σκοπός του ήταν να καταστήσει τη μουσική ανεξάρτητη επιστήμη, με τους δικούς της νόμους, τις δικές της αρχές και τη δική της χαρακτηριστική φύση [φύσις]. Θεωρούσε ότι τα ερωτήματα που προέκυπταν από την εμπειρία – όπως, για παράδειγμα, γιατί αυτή είναι μια πιθανή μελωδία και η άλλη όχι, σε τι συνίσταται η ομοιότητα κάποιων νοτών μέσα σε μια κλίμακα κλπ - έχρηζαν απάντησης, όχι μέσω της παραγωγής των ήχων της φυσικής, ούτε και μέσω των μαθηματικών προτάσεων, αλλά μέσα από αρχές που διέπονται από την εμπειρία μας και που εξαρτώνται, σε τελευταία ανάλυση, από την [αίσθησις] μας, από αυτό που εμείς εκλαμβάνουμε ως μελωδικό και σύμφωνο. Έτσι, λοιπόν, ο ρόλος της [ακοής] ήταν να κρίνει το μέγεθος των διαστημάτων, της [αισθήσεως] να αναγνωρίσει τα διαστήματα, της [μνήμης] να αποθηκεύσει τη σειρά τους και της [διανοίας] να αναγνωρίσει τη σειρά τους, όχι απλά ως σειρά διαστημάτων – κάτι που θα ήταν ασήμαντο από μουσικής άποψης - αλλά ως υπεύθυνη για το σχηματισμό δομών, μέσα στις οποίες οι νότες σχετίζονται με λειτουργικό τρόπο (Barker, 1978).

Έτσι, λοιπόν, η ομάδα των Πυθαγορείων και αυτή του Αριστόξενου ήταν δύο αντιτιθέμενες ομάδες, με τη μεν πρώτη να αποτελείται από τους λεγόμενους «κανονικούς», οι οποίοι ερμήνευαν την αρμονία ως τάξη στους αριθμούς και τη γεωμετρία και τη δε άλλη από τους «εμπειρικούς», που πίστευαν ότι η αρμονία είναι τάξη χωρίς έμφαση στα μαθηματικά. Όπως αναφέρει ο Πτολεμαίος στο *Harmonica*,

«ἐν ἅπασι γὰρ ἴδιόν ἐστι τοῦ θεωρητικοῦ καὶ ἐπιστήμονος τὸ δεικνύναι τὰ τῆς φύσεως ἔργα μετὰ λόγου τινὸς καὶ τεταγμένης αἰτίας δημιουργούμενα καὶ μηδὲν εἰκῇ, μηδὲ ὡς ἔτυχεν ἀποτελούμενον ὑπ' αὐτῆς καὶ μάλιστα ἐν ταῖς οὕτω καλλίσταις κατασκευαῖς, ὁποῖαι τυγχάνουσιν αἱ τῶν λογικωτέρων αἰσθήσεων, ὄψεως καὶ ἀκοῆς»

[στα πάντα είναι έργο του θεωρητικού επιστήμονα να δείξει ότι τα έργα της φύσης έχουν δημιουργηθεί για κάποιο λόγο και κάποια αιτία κι ότι τίποτα δεν παράγεται στη φύση τυχαία, ιδίως οι τελειότερες κατασκευές της, τα είδη που ανήκουν στις πιο λογικές αισθήσεις, την όραση και την ακοή]

«ταύτης δὴ τῆς προθέσεως οἱ μὲν οὐδόλως ἐοίκασι πεφροντικέναι μόνῃ τῇ χειρουργικῇ χρήσει καὶ τῇ ψιλῇ καὶ ἀλόγῳ τῆς αἰσθήσεως τριβῇ προσχόντες, οἱ δὲ θεωρητικώτερον τῷ τέλει προσενεχθέντες»

[Προς αυτή την κατεύθυνση, οι άνθρωποι δεν φαίνεται να έδωσαν προσοχή, όντας αφοσιωμένοι στη χρήση χειρονακτικών τεχνικών και στην απέριττη και άλογη άσκηση της αντίληψης, ενώ άλλοι προσέγγισαν το αντικείμενο πολύ θεωρητικά]

«οὗτοι δ' ἂν μάλιστα εἶεν οἵ τε Πυθαγόρειοι καὶ οἱ ᾿Αριστοξένειοι–διαμαρτεῖν ἑκάτεροι· οἱ μὲν γὰρ Πυθαγορικοὶ μηδὲ ἐν οἷς ἀναγκαῖον ἦν πᾶσι τῇ τῆς ἀκοῆς προσβολῇ κατακολουθήσαντες ἐφήρμοσαν ταῖς διαφοραῖς τῶν ψόφων λόγους ἀνοικείους πολλαχῇ τοῖς φαινομένοις, ὥστε καὶ διαβολὴν ἐμποιῆσαι τῷ τοιούτῳ κριτηρίῳ παρὰ τοῖς ἑτεροδόξοις»

[Αυτοί είναι, συγκεκριμένα, οι Πυθαγόρειοι και οι Αριστοξένειοι, που κάνουν λάθος και οι δύο. Κι αυτό γιατί οι Πυθαγόρειοι δεν ακολούθησαν τις εντυπώσεις της ακοής, ακόμα και σ' εκείνα τα πράγματα που ήταν αναγκαίο να το κάνουν και με τις διαφορές μεταξύ ήχων συνέδεσαν τους λόγους που συχνά ήταν ακατάλληλοι στα φαινόμενα και διέβαλαν αυτούς που είχαν διαφορετική άποψη]

«οἱ δὲ ᾿Αριστοξένειοι πλεῖστον δόντες τοῖς διὰ τῆς αἰσθήσεως καταλαμβανομένοις ὁδοῦ πάρεργον ὥσπερ κατεχρήσαντο τῷ λόγῳ, καὶ παρ' αὐτὸν καὶ παρὰ τὸ φαινόμενον»

[Αντίθετα, οι Αριστοξένειοι έριχναν το βάρος σε ό,τι γινόταν καταληπτό από την αντίληψη και κακομεταχειρίστηκαν την αιτία, σαν να ήταν δευτερεύουσα και αντιτιθέμενη]

«παρ' αὐτὸν μὲν ὅτι μὴ ταῖς τῶν ψόφων διαφοραῖς ἐφαρμόζουσι τοὺς ἀριθμούς, τουτέστι τὰς εἰκόνας τῶν λόγων, ἀλλὰ τοῖς διαστήμασιν αὐτῶν, παρὰ τὸ φαινόμενον δὲ ὅτι καὶ τούτους ἐπὶ ἀνοικείων ταῖς αἰσθητικαῖς συγκαταθέσεσι παραβάλλουσι μερισμῶν» [τόσο στην ίδια την αιτία [λόγος], όσο και στο γεγονός ότι δεν είναι τα διακεκριμένα χαρακτηριστικά των ήχων που ταιριάζουν στους αριθμούς – δηλαδή οι εικόνες των λόγων - αλλά τα διαστήματα μεταξύ τους και αντιτιθέμενη στο γεγονός ότι σχετίζουν επίσης αυτούς τους αριθμούς με διαιρέσεις που είναι ασυνεπείς με τις αισθήσεις]

Η θεωρία της αρμονίας προσέλκυσε το ενδιαφέρον πολλών μεγάλων προσωπικοτήτων, όπως του Ευκλείδη (περί το 300 π.Χ.), ο οποίος φέρεται να έγραψε την *«Κατατομή Κανόνος»*, του Πτολεμαίου (85-165 μ.Χ.), μεγάλου μαθηματικού, αστρονόμου και γεωγράφου, ο οποίος διεξήγαγε την πιο κατανοητή έρευνα για τη θεωρία της αρμονίας *(Harmonica)*, όπως επίσης και μια λεπτομερή έρευνα με ακριβή μαθηματική παρουσίαση. Οι νεοπυθαγόρειοι (2^{ος} αιώνας π.Χ - 3^{ος} αιώνας μ.Χ) μπορούμε να πούμε ότι δεν συνεισέφεραν σε τέτοιο βαθμό, ωστόσο συνόψισαν όλα τα διασωθέντα έγγραφα και τους διασωθέντες μύθους γύρω από τους Πυθαγορείους. Ένας από αυτούς, ο Νικόμαχος (60-120 μ.Χ.) με τα έργα του «*Arithmetica*» και «*Enchiridion Harmonicum*» αποτέλεσε σημαντική πηγή για τις επόμενες γενιές. Αργότερα, ο Βοήθειος (480-525 μ.Χ.) έπαιξε σημαντικό ρόλο στην εκλαΐκευση της πυθαγόρειας θεωρίας της αρμονίας.

Η Τετρακτύς

Η Τετρακτύς αποτελεί τον ακρογονιαίο λίθο της μουσικής θεωρίας των Πυθαγορείων. Πρόκειται για την τετράδα των αριθμών 1, 2, 3 και 4, οι οποίοι συμμετέχουν στις συμφωνίες της πυθαγόρειας μουσικής θεωρίας.

Στο σημείο αυτό, τονίζεται ότι, στο πλαίσιο της θεωρίας αυτής, τα σύμφωνα διαστήματα ήταν η διαπασών, η πέμπτη, η τετάρτη, η δις-διαπασών, η σύνθετη πέμπτη και η σύνθετη τετάρτη. Τα διαστήματα αυτά εκφράζονταν από τους λόγους 2:1, 3:2, 4:3, 4:1, 3:1, 8:3 αντίστοιχα. Εδώ βλέπουμε ότι η σύνθετη τετάρτη δίνεται από το λόγο 8:3, στον οποίο συμμετέχει ο αριθμός 8 που δεν ανήκει στην τετρακτύ. Από την άλλη μεριά, η σύνθετη τετάρτη δεν υπακούει στον κανόνα σύμφωνα με τον οποίο κάθε σύμφωνη συνήχηση πρέπει να έχει τους όρους της σε επιμόριο ή πολλαπλάσιο λόγο, δηλαδή είτε με τη μορφή $\frac{\nu+1}{\nu}$ (επιμόριος λόγος) ή με τη μορφή $\frac{\mu\times\nu}{\nu}$ (πολλαπλάσιος λόγος). Έτσι, θα λέγαμε ότι η σύνθετη τετάρτη αποτέλεσε την αχίλλειο πτέρνα της πυθαγόρειας θεωρίας της μουσικής.

Οι τέσσερις αριθμοί που απαρτίζουν την τετρακτύ, όταν αθροιστούν, δίνουν ως αποτέλεσμα το 10, που θεωρείται από τους Πυθαγορείους ο πληρέστερος αριθμός.

Κατά τον Σέξτο Εμπειρικό στο *Adversus Mathematicos*:

«οἱ Πυθαγορικοὶ ποτὲ μὲν εἰώθασι λέγειν τὸ ἀριθμῷ δέ τε πάντ' ἐπέοικεν»

[Οι Πυθαγόρειοι συνηθίζουν να λένε ότι «όλα τα πράγματα μοιάζουν με τον αριθμό»]

«ὁτὲ δὲ τὸν φυσικώτατον ὀμνύναι ὅρκον οὑτωσί, οὐ μὰ τὸν ἁμετέρᾳ κεφαλᾷ παραδόντα τετρακτύν,παγὰν ἀενάου φύσεως ῥιζώματ' ἔχουσαν»

[και μερικές φορές ορκίζονται «σ’ αυτόν που μας έδωσε την τετρακτύ», η οποία είναι η πηγή και η ρίζα της αενάου φύσης]

«τὸν μὲν παραδόντα λέγοντες Πυθαγόραν (τοῦτον γὰρ ἐθεοποίουν), τετρακτὺν δὲ ἀριθμόν τινα, ὃς ἐκ τεσσάρων τῶν πρώτων ἀριθμῶν συγκείμενος τὸν τελειότατον ἀπήρτιζεν, ὥσπερ τὸν δέκα, ἓν γὰρ καὶ δύο καὶ τρία καὶ τέσσαρα δέκα γίνεται.»

[Με τη φράση «σ’ αυτόν» εννοούν τον Πυθαγόρα (γιατί τον είχαν θεοποιήσει) και με τη λέξη «τετρακτύς» εννοούν έναν αριθμό που συνίσταται από τους τέσσερις πρώτους αριθμούς και φτιάχνει τον τελειότερο απ’ όλους τους αριθμούς, το δέκα: γιατί ένα και δύο και τρία και τέσσερα κάνουν δέκα]

«ἔστι τε οὗτος ὁ ἀριθμὸς πρώτη τετρακτὑς, πηγὴ δὲ ἀενάου φὑσεως λέλεκται παρόσον κατ' αὐτοὺς ὁ σύμπας κόσμος κατὰ ἁρμονίαν διοικεῖται»

[Αυτός ο αριθμός είναι η πρώτη τετρακτύς και περιγράφεται ως «η πηγή της αενάου φύσεως», σε τέτοιο βαθμό που όλο το σύμπαν είναι οργανωμένο στη βάση αυτών των αριθμών, σύμφωνα με την αρμονία]

Ο Αριστοτέλης, στα *Μεταφυσικά*, αναφέρει ότι:

«Ἐν δὲ τούτοις καὶ πρὸ τούτων οἱ καλούμενοι Πυθαγόρειοι τῶν μαθημάτων ἁψάμενοι πρῶτοι ταῦτά τε προήγαγον, καὶ ἐντραφέντες ἐν αὐτοῖς τὰς τούτων ἀρχὰς τῶν ὄντων ἀρχὰς ᾠήθησαν εἶναι πάντων»

[Αυτοί οι άνθρωποι (ο Λεύκιππος και ο Δημόκριτος) και οι πρόγονοί τους, (οι Πυθαγόρειοι) ασχολήθηκαν με τα μαθηματικά και ήταν οι πρώτοι που εξέλιξαν αυτή την επιστήμη. Και αφού ανατράφηκαν με αυτή, σκέφτηκαν πως οι αρχές της είναι οι αρχές των πάντων]

«ἐπεὶ δὲ τούτων οἱ ἀριθμοὶ φύσει πρῶτοι, ἐν δὲ τούτοις ἐδόκουν θεωρεῖν ὁμοιώματα πολλὰ τοῖς οὖσι καὶ γιγνομένοις, μᾶλλον ἢ ἐν πυρὶ καὶ γῇ καὶ ὕδατι»

[μια και μέσα από τα μαθηματικά πρώτοι έρχονται εκ φύσεως οι αριθμοί και σ’ αυτούς έβλεπαν πολλές ομοιότητες με τα υπάρχοντα πράγματα και με αυτά που πρόκειται να γίνουν, πολύ δε περισσότερο με τη φωτιά, τη γη και το νερό] «ὅτι τὸ μὲν τοιονδὶ τῶν ἀριθμῶν πάθος δικαιοσύνη τὸ δὲ τοιονδὶ ψυχή τε καὶ νοῦς ἕτερον δὲ καιρὸς καὶ τῶν ἄλλων ὡς εἰπεῖν ἕκαστον ὁμοίως, ἔτι δὲ τῶν ἁρμονιῶν ἐν ἀριθμοῖς ὁρῶντες τὰ πάθη καὶ τοὺς λόγους, –ἐπεὶ δὴ τὰ μὲν ἄλλα τοῖς ἀριθμοῖς ἐφαίνοντο τὴν φύσιν ἀφωμοιῶσθαι πᾶσαν, οἱ δ' ἀριθμοὶ πάσης τῆς φύσεως πρῶτοι»

[(σκέφτονταν ότι κάποιοι από τους αριθμούς εκφράζουν δικαιοσύνη, κάποιοι άλλοι ψυχή και νόηση, ευκαιρία και ούτω καθεξής), μια και είδαν ότι τα γνωρίσματα και οι λόγοι των αρμονιών βρίσκονται μέσα στους αριθμούς, μια και τελικά όλα τα άλλα πράγματα φαίνεται να έχουν αφομοιωθεί σε όλη τη φύση τους από την ομοιότητα των αριθμών και απ' όλη τη φύση οι αριθμοί είναι πρώτοι]

«τὰ τῶν ἀριθμῶν στοιχεῖα τῶν ὄντων στοιχεῖα πάντων ὑπέλαβον εἶναι, καὶ τὸν ὅλον οὐρανὸν ἁρμονίαν εἶναι καὶ ἀριθμόν·»

[κι έτσι υπέθεσαν ότι τα στοιχεία των αριθμών είναι τα στοιχεία όλων των πραγμάτων κι ότι ο ουρανός είναι αρμονία και αριθμός]

«καὶ ὅσα εἶχον ὁμολογούμενα ἔν τε τοῖς ἀριθμοῖς καὶ ταῖς ἁρμονίαις πρὸς τὰ τοῦ οὐρανοῦ πάθη καὶ μέρη καὶ πρὸς τὴν ὅλην διακόσμησιν, ταῦτα συνάγοντες ἐφήρμοττον»

[Και όλα τα πράγματα στους αριθμούς και τις αρμονίες που μπορούσαν να δείξουν ότι συμφωνούν με τα γνωρίσματα του ουρανού και με όλη του τη δομή, αυτά συνέλεξαν και συνέδεσαν]

«κἂν εἴ τί που διέλειπε, προσεγλίχοντο τοῦ συνειρομένην πᾶσαν αὐτοῖς εἶναι τὴν πραγματείαν·»

[Κι αν κάτι έλειπε κάπου, αυτοί πάλι προσκολλόνταν στο γεγονός ότι όλη η θεωρία θα έπρεπε να χαρακτηρίζεται από συνάφεια]

«λέγω δ' οἷον, ἐπειδὴ τέλειον ἡ δεκὰς εἶναι δοκεῖ καὶ πᾶσαν περιειληφέναι τὴν τῶν ἀριθμῶν φύσιν, καὶ τὰ φερόμενα κατὰ τὸν οὐρανὸν δέκα μὲν εἶναί φασιν, ὄντων δὲ ἐννέα μόνον τῶν φανερῶν διὰ τοῦτο δεκάτην τὴν ἀντίχθονα ποιοῦσιν»

[Εννοώ, για παράδειγμα, ότι από τη στιγμή που ο αριθμός δέκα φαίνεται να είναι τέλειος και να αγκαλιάζει όλη τη φύση των αριθμών, λένε ότι τα πράγματα που βρίσκονται στον ουρανό είναι δέκα. Αφού, όμως, τα ορατά είναι μόνο εννέα, φτιάχνουν το δέκατο, που φέρει το όνομα «Αντίχθων»**]**

(Να σημειώσουμε σε αυτό το σημείο ότι τα ορατά σώματα είναι ο Ήλιος, η Σελήνη, ο Ερμής, η Αφροδίτη, ο Άρης, ο Δίας, ο Κρόνος, η Γη και η σφαίρα των απλανών αστέρων).

ΠΥΘΑΓΟΡΕΙΟΙ ΚΑΙ ΑΣΥΜΜΕΤΡΙΑ

Η βαθιά ριζωμένη πυθαγόρεια πίστη ότι η φύση του κόσμου δομείται κατά τρόπο ρητό και ότι οι δομικές σχέσεις του σύμπαντος δεν μπορεί παρά να είναι σχέσεις λόγων θετικών ακεραίων αριθμών, προσέκρουσε στο αδιέξοδο της ανακάλυψης της ασυμμετρίας. Η ανακάλυψη της ασυμμετρίας από τους Πυθαγορείους αποτελεί αναμφισβήτητα ένα γεγονός σταθμό στην ιστορία των μαθηματικών και ταυτόχρονα μια πολύ μεγάλη νίκη του ανθρώπινου νου. Μεγάλο ενδιαφέρον παρουσιάζει πώς οι Πυθαγόρειοι οδηγήθηκαν σε αυτή, καθώς και τι προηγήθηκε. Παρακάτω παρατίθεται η έρευνα του καθηγητή Σ. Νεγρεπόντη σχετικά με την ασυμμετρία και τη σύνδεση αυτής με τη μουσική.

Πιο συγκεκριμένα, ο καθηγητής Σ. Νεγρεπόντης - όπως άλλωστε δίδαξε στο μάθημα «Ιστορία των Αρχαίων Ελληνικών Μαθηματικών, Στοιχεία Ευκλείδη» στα πλαίσια του Μεταπτυχιακού Προγράμματος «Διδακτική και Μεθοδολογία των Μαθηματικών» - επιχειρηματολογεί για το γεγονός ότι η απόδειξη της αρρητότητας του $\sqrt{2}$ είναι ειδικής φύσεως και διαφορετική από αυτή που εμείς γνωρίζουμε. Στη συνέχεια, στηρίζει την άποψη ότι η πρώιμη αριθμητική θεωρία των λόγων σχετίζεται άμεσα με τα ακουστκά πειράματα, ενώ παρακάτω εξηγεί πώς η προσπάθεια εύρεσης ενός κοινού μουσικού μέτρου οδήγησε, μέσω της άπειρης ανθυφαιρετικής διαδικασίας, στο συμπέρασμα ότι το διάστημα μιας οκτάβας κι αυτό του «διαπέντε» είναι ασύμμετρα. Τέλος, συσχετίζει τα δύο μουσικά μέτρα (τόνος, δίεση) και την αρμονική ανθυφαίρεση με τα δύο γεωμετρικά μέτρα (διαγώνιος, πλευρά) και τη γεωμετρική ανθυφαίρεση, μεταφέροντας έτσι τη μέθοδο της ανθυφαίρεσης από την αρμονία στη γεωμετρία.

Η Αρρητότητα του $\sqrt{2}$

Ας ξεκινήσουμε από την πιο οικεία σε μας απόδειξη της αρρητότητας του $\sqrt{2}$, η οποία έχει ως εξής: «Έστω $\sqrt{2}=\frac{m}{n}$, όπου m, n πρώτοι μεταξύ τους φυσικοί αριθμοί. Τότε $2n^2=m^2$, που σημαίνει ότι ο m^2 είναι άρτιος, άρα και ο m είναι άρτιος. Έτσι, $m=2k$, οπότε $n^2=2k^2$. Δηλαδή ο n^2 είναι άρτιος, άρα και ο n. Τότε, οι αριθμοί m, n δεν είναι πρώτοι μεταξύ τους, γεγονός το οποίο έρχεται σε αντίφαση με την αρχική υπόθεση».

Πρόκειται για μια αρχαία απόδειξη, που εμφανίζεται στα *Prior Analytics* του Αριστοτέλη (41 a23, 50 a35) και στα *Στοιχεία* του Ευκλείδη (Πρόταση Χ117). Αν και η παραπάνω απόδειξη θεωρείται η πρώτη και γνήσια απόδειξη που δόθηκε από τους Πυθαγορείους, υπάρχουν κάποιες ενστάσεις, όπως θα διαπιστώσουμε παρακάτω.

Πιο συγκεκριμένα, ο van der Waerden αναφέρεται στην Πρόταση III της *Κατατομής Κανόνος* - έργο κατά πάσα πιθανότητα του Ευκλείδη – η οποία αφορά τους επιμόριους λόγους και σε μια πρόταση του Πυθαγόρειου Αρχύτα (όπως αυτή δόθηκε από τον Βοήθειο στο έργο του *De Institutione Musica*).

Όσον αφορά την Πρόταση III της *Κατατομής Κανόνος*, έχουμε τα εξής:

«Ἐπιμορίου διαστήματος οὐδεὶς μέσος, οὔτε εἷς οὔτε πλείους, ἀνάλογον ἐμπεσεῖται ἀριθμός»

[Σε επιμόριο διάστημα κανένας μέσος ανάλογος, ούτε ένας ούτε περισσότεροι μέσοι ανάλογοι αριθμοί παρεμβάλλονται]

Η πρόταση του Αρχύτα, που αποδεικνύει ότι ένας επιμόριος λόγος δεν μπορεί να δεχθεί γεωμετρικό μέσο, λέει τα εξής:

> « Έστω ο επιμόριος λόγος Α:Β. Έστω Γ, Δ+Ε οι μικρότεροι όροι του λόγου κι αφού είναι επιμόριοι, ο Δ+Ε υπερέχει του Γ κατά ένα μέρος του εαυτού του. Ας είναι αυτό το μέρος το Δ. Ισχυρίζομαι ότι το Δ δεν είναι αριθμός αλλά μονάδα. Γιατί αν ήταν αριθμός και ένα μέρος του Δ+Ε, τότε θα διαιρούσε το Δ+Ε, κι έτσι θα διαιρούσε και το Ε, δηλαδή το Γ. Τότε το Δ θα διαιρούσε και το Δ+Ε και το Γ, που είναι αδύνατο. Γι' αυτό, κανένας μέσος όρος δεν βρίσκεται ανάμεσά τους, τέτοιος ώστε να διαιρεί το λόγο σε ίσα μέρη. Τελικά, κανένας μέσος όρος δεν μπορεί να τοποθετηθεί μεταξύ άλλων αριθμών του ίδιου λόγου, ώστε να τον διαιρέσει σε ίσα μέρη».

Σύμφωνα με τον Andrew Barker, με το παραπάνω θεώρημα ο Αρχύτας δεν αποδεικνύει στην ουσία ότι οι επιμόριοι λόγοι δεν μπορούν να χωριστούν γεωμετρικά, αλλά ότι στους επιμόριους λόγους, με τους μικρότερους δυνατούς όρους, οι δύο όροι διαφέρουν κατά μια μονάδα. Ο λόγος για τον οποίο απέδειξε ο Αρχύτας ένα τέτοιο θεώρημα, από καθαρά μαθηματικής άποψης, ήταν για να δείξει ότι η μόνη κατηγορία λόγων που δεν δέχεται γεωμετρικό μέσο είναι οι επιμόριοι λόγοι, σε αντίθεση με τις άλλες κατηγορίες οι οποίες, έστω και σε μεμονωμένες περιπτώσεις, επιτρέπουν την ύπαρξη αυτού. Ωστόσο, από μουσικής άποψης, το θεώρημα αυτό βρίσκει χαρακτηριστική εφαρμογή: υποθέτοντας ότι η οκτάβα δεν έχει γεωμετρικό μέσο, ο σκοπός του Αρχύτα ήταν να δείξει ότι και κανένα άλλο σύμφωνο διάστημα δεν θα είχε αυτή την ιδιότητα, ακόμα κι ένα επιμόριο διάστημα.

Από την άλλη μεριά, οι van der Waerden, Becker και Zeugen βασίζονται σε ένα εκπληκτικό κείμενο του διαλόγου «Θεαίτητος» του Πλάτωνα (147C – 148B). Στο κείμενο αυτό, εμφανίζεται ο μεγάλος μαθηματικός Θεαίτητος ως ένας νεαρός μαθητής που παρακολουθεί το μάθημα του Θεόδωρου του Κυρηναίου πάνω στην ασυμμετρία, λίγο μετά το 400 π.Χ. Στο μάθημα αυτό, ο Θεόδωρος απέδειξε την ασυμμετρία των λόγων $\sqrt{3}:1, \sqrt{5}:1, \ldots$ μέχρι το $\sqrt{17}:1$, για καθέναν από τους οποίους χρησιμοποίησε μια συγκεκριμένη μέθοδο. Από το $\sqrt{17}:1$ συνάντησε κάποια δυσκολία που τον ανάγκασε να σταματήσει:

«Περὶ δυνάμεών τι ἡμῖν Θεόδωρος ὅδε ἔγραφε, τῆς τε τρίποδος πέρι καὶ πεντέποδος [ἀποφαίνων] ὅτι μήκει οὐ σύμμετροι τῇ ποδιαίᾳ, καὶ οὕτω κατὰ μίαν ἑκάστην προαιρούμενος μέχρι τῆς ἑπτακαιδεκάποδος· ἐν δὲ ταύτῃ πως ἐνέσχετο. ἡμῖν οὖν εἰσῆλθέ τι τοιοῦτον, ἐπειδὴ ἄπειροι τὸ πλῆθος αἱ δυνάμεις ἐφαίνοντο, πειραθῆναι συλλαβεῖν εἰς ἕν, ὅτῳ πάσας ταύτας προσαγορεύσομεν τὰς δυνάμεις»

Σ' αυτό ακριβώς το σημείο ο Θεαίτητος είχε την ιδέα μιας γενικότερης απόδειξης, πιθανώς για όλους τους λόγους της μορφής $\sqrt{\mathrm{n}}:1$, όπου n μη τετράγωνος αριθμός. Οι van der Waerden, Becker και Zeugen ισχυρίζονται, λοιπόν, ότι αν η προαναφερθείσα απόδειξη του $\sqrt{2}$ ήταν τότε γνωστή και οικεία, τότε δεν θα δικαιολογούταν το εμπόδιο που συνάντησε ο Θεόδωρος για $\mathrm{n} > 17$, μια και η απόδειξη του $\sqrt{2}$ θα μπορούσε να γενικευτεί για όλες τις περιπτώσεις. Έτσι, καταλήγουν στο συμπέρασμα ότι η γνήσια απόδειξη της ασυμμετρίας του $\sqrt{2}$ ήταν ειδικής φύσεως και διαφορετική από αυτή που εμείς γνωρίζουμε.

Η Πυθαγόρεια Αριθμητική

Τα πρώτα πυθαγόρεια μαθηματικά είναι η Αριθμητική. Υπάρχουν αποδείξεις για το γεγονός ότι οι Πυθαγόρειοι χρησιμοποιούσαν σειρές από χαλίκια για τις αρχικές αποδείξεις των θεωρημάτων τους. Έτσι, οι πρώτες αποδείξεις τους ήταν συγκεκριμένες και είχαν έναν πειραματικό χαρακτήρα. Αυτό ταιριάζει με τη διακριτή αναπαράσταση των αριθμών, όπως φαίνεται στις πραγματείες νεοπυθαγορείων, όπως ο Νικόμαχος ο Γερασηνός, ο Θέων ο Σμηρνεύς και ο Ιάμβλιχος.

Ωστόσο, η κυρίαρχη έννοια στα τρία αριθμητικά βιβλία των *Στοιχείων* (VII – IX) είναι αυτή του λόγου και της αναλογίας. Ο πρώτος Έλληνας μαθηματικός, ο Θαλής ο Μιλήσιος, δεν κάνει χρήση – απ' όσο γνωρίζουμε – της αναλογίας. Πώς όμως προέκυψε η χρήση του λόγου και της αναλογίας στην Αριθμητική; Σύμφωνα με τον van der Waerden, η θεωρία των λόγων δεν είναι τίποτα περισσότερο από μια θεωρητική πραγματεία αριθμητικών κλασμάτων. Όμως, μια τέτοια υπόθεση γίνεται σχεδόν αβάσιμη, αν συνειδητοποιήσουμε (όπως ο Fowler) ότι στην ευκλείδεια αριθμητική πουθενά δεν υπάρχει ο κανόνας της πρόσθεσης κλασμάτων.

Από την άλλη μεριά, η αρχαία ελληνική αριθμητική ασχολούταν με τον πολλαπλασιασμό των λόγων (συγκείμενος λόγος) και, μάλιστα, για να συνθέσουμε τους λόγους α:β και γ:δ, πρώτα βρίσκουμε ένα κοινό πολλαπλάσιο ε των β και γ, τέτοιο ώστε ε = β·ζ = γ·η για κάποιους αριθμούς ζ, η κι ύστερα σχηματίζουμε τη σύνθεση των λόγων αζ:δη.

Τα Ακουστικά Πειράματα

Οι Πυθαγόρειοι δεν έκαναν μουσική για τη μουσική, καθώς μέσα από αυτή έψαχναν τη δομή του σύμπαντος, την αρμονία. Στην πορεία, αρμονία και μουσική έγιναν λέξεις συνώνυμες γι' αυτούς.

Στο 26ο κεφάλαιο της σωζόμενης πραγματείας του Ιάμβλιχου *De Vita Pythagorica (Πυθαγόρου Βίος)* - όπως φαίνεται από τα παρακάτω λόγια: «Πυθαγόρας δὲ συνετέλεσε τὴν περὶ τῶν οὐρανίων ἐπιστήμην καὶ ταῖς ἀποδείξεσιν αὐτὴν ὅλαις ταῖς ἀριθμητικαῖς καὶ ταῖς γεωμετρικαῖς διέλαβεν» - προβάλλεται η άποψη ότι η αρχική ιδέα για τη μαθηματική τεκμηρίωση της μουσικής προήλθε από τον ίδιο τον Πυθαγόρα και οπωσδήποτε δεν αποτελεί ύστερη επινόηση κάποιων πρώιμων Πυθαγορείων ή πλατωνικών Πυθαγορείων (Θέων ο Σμηρνεύς, Θράσυλλος, Νικόμαχος κ.ά.). Ωστόσο, σήμερα γνωρίζουμε ότι η διαχρονικότητα του περιεχομένου της πυθαγόρειας θεωρίας της μουσικής οφείλεται κυρίως στην εις βάθος μελέτη που διεξήγαγαν διανοητές, κατοπινοί του Πυθαγόρα και ορμώμενοι από τις αρχικές ιδέες αυτού. Η συνεισφορά, λοιπόν, του Πυθαγόρα στο συγκεκριμένο θέμα μάλλον έγκειται στη σημασία που έδωσε στην ιδιαίτερη σχέση ήχου και αριθμού, παρά στην επιστημονική κατοχύρωση των συνεπειών της (Barker, 1989).

- *Η Διήγηση του Ιάμβλιχου*

Έτσι, λοιπόν, ο Ιάμβλιχος υποστηρίζει ότι η ανακάλυψη έγινε από τον Πυθαγόρα και αναφέρει τα εξής: «παρά τι χαλκοτυπεῖον περιπατῶν ἔκ τινος δαιμονίου συντυχίας ἐπήκουσε ῥαιστήρων σίδηρον ἐπ' ἄκμονι ῥαιόντων καὶ τοὺς ἤχους παραμὶξ πρὸς ἀλλήλους <συμφωνοτάτους> ἀποδιδόντων, πλὴν μιᾶς συζυγίας. ἐπεγίνωσκε δ' ἐν αὐτοῖς τήν τε διὰ πασῶν τήν τε διὰ πέντε καὶ τὴν διὰ τεσσάρων συνῳδίαν, τὴν δὲ μεταξύτητα τῆς τε διὰ τεσσάρων καὶ τῆς διὰ πέντε ἀσύμφωνον μὲν ἑώρα αὐτὴν καθ' ἑαυτήν, συμπληρωτικὴν δὲ ἄλλως τῆς ἐν αὐτοῖς μειζονότητος. ἄσμενος δὴ ὡς κατὰ θεὸν ἀνυομένης αὐτῷ τῆς προθέσεως εἰσέδραμεν εἰς τὸ χαλκεῖον, καὶ ποικίλαις πείραις παρὰ τῶν ἐν τοῖς ῥαιστῆρσιν ὄγκων εὑρὼν τὴν διαφορὰν τοῦ ἤχου, ἀλλ' οὐ παρὰ τὴν τῶν ῥαιόντων βίαν οὐδὲ παρὰ τὰ σχήματα τῶν σφυρῶν οὐδὲ παρὰ τὴν τοῦ ἐλαυνομένου σιδήρου μετάθεσιν, σηκώματα ἀκριβῶς ἐκλαβὼν καὶ ῥοπὰς ἰσαιτάτας τῶν ῥαιστήρων πρὸς ἑαυτὸν ἀπηλλάγη, καὶ ἀπό τινος ἑνὸς πασσάλου διὰ γωνίας ἐμπεπηγότος τοῖς τοίχοις, ἵνα μὴ κἀκ τούτου διαφορά τις ὑποφαίνηται ἢ ὅλως ὑπονοῆται πασσάλων ἰδιαζόντων παραλλαγή, ἀπαρτίσας τέσσαρας χορδὰς ὁμοΰλους καὶ ἰσοκώλους, ἰσοπαχεῖς τε καὶ ἰσοστρόφους, ἑκάστην ἀφ' ἑκάστης ἐξήρτησεν, ὁλκὴν προσδήσας ἐκ τοῦ κάτωθεν μέρους, τὰ δὲ μήκη τῶν χορδῶν μηχανησάμενος ἐκ παντὸς ἰσαίτατα. εἶτα κρούων ἀνὰ δύο ἅμα χορδὰς ἐπαλλὰξ συμφωνίας εὕρισκε τὰς προλεχθείσας, ἄλλην ἐν ἄλλῃ συζυγίᾳ. τὴν μὲν γὰρ ὑπὸ τοῦ μεγίστου ἐξαρτήματος τεινομένην πρὸς τὴν ὑπὸ τοῦ μικροτάτου διὰ πασῶν φθεγγομένην κατελάμβανεν· ἦν δὲ ἣ μὲν δώδεκα τινῶν ὁλκῶν, ἣ δὲ ἕξ. ἐν διπλασίῳ δὴ λόγῳ ἀπέφαινε τὴν διὰ πασῶν, ὅπερ καὶ αὐτὰ τὰ βάρη ὑπέφαινε. τὴν δ' αὖ μεγίστην πρὸς τὴν παρὰ τὴν μικροτάτην, οὖσαν ὀκτὼ ὁλκῶν, διὰ πέντε συμφωνοῦσαν, ἔνθεν ταύτην ἀπέφαινεν ἐν ἡμιολίῳ λόγῳ, ἐν ᾧπερ καὶ αἱ ὁλκαὶ ὑπῆρχον πρὸς ἀλλήλας· πρὸς δὲ τὴν μεθ' ἑαυτὴν μὲν τῷ βάρει, τῶν δὲ λοιπῶν μείζονα, ἐννέα σταθμῶν ὑπάρχουσαν, τὴν διὰ τεσσάρων, ἀναλόγως τοῖς βρίθεσι. καὶ ταύτην δὴ ἐπίτριτον ἄντικρυς κατελαμβάνετο, ἡμιολίαν τὴν αὐτὴν φύσει ὑπάρχουσαν τῆς μικροτάτης (τὰ γὰρ ἐννέα πρὸς τὰ εξ οὕτως ἔχει)· ὄνπερ τρόπον ἡ παρὰ τὴν μικρὰν ἡ ὀκτὼ πρὸς μὲν τὴν τὰ εξ ἔχουσαν ἐν ἐπιτρίτῳ λόγῳ ἦν, πρὸς δὲ τὴν τὰ δώδεκα ἐν ἡμιολίῳ».

Από τα παραπάνω προκύπτει ότι η εν λόγω ανακάλυψη έγινε με τρόπο μαγικά συμπτωματικό, τη στιγμή που ο Πυθαγόρας περνούσε έξω από ένα σιδηρουργείο, όπου άκουσε μια διαδοχή από διαστηματικές σχέσεις που προέρχονταν από τα χτυπήματα των σφυριών στο αμόνι. Εκεί, για πρώτη φορά αντιλήφθηκε ότι οι [διαφορές] του ήχου (αυτό που σήμερα ονομάζουμε συχνότητες του ήχου) εξαρτώνται από τον όγκο των σφυριών και όχι από τη μεταβολή της δύναμης που ασκείται μέσω αυτών πάνω στο παλλόμενο αμόνι. Αφού, λοιπόν, ανέλυσε και μέτρησε προσεκτικά τις διαφορές όγκου και βάρους που τα σφυριά αυτά παρουσίαζαν μεταξύ τους, επέστρεψε στο σπίτι του επιχειρώντας πλέον να προσαρμόσει τα ίδια βάρη στα άκρα τεσσάρων πανομοιότυπων χορδών, στηριγμένων σε μια σταθερή ξύλινη βάση που λειτουργούσε ως ηχείο. Έπειτα, κρούοντας ανά δύο τις χορδές, είδε ότι η χορδή με τη μεγαλύτερη τάση, σε συνδυασμό με εκείνη που είχε τη μικρότερη τάση απ’ όλες, έδινε το ιδιαίτερα ευχάριστο διάστημα της ογδόης. Τα βάρη που είχε τοποθετήσει ο Πυθαγόρας ήταν ισοδύναμα με 12 και 6 αριθμητικές μονάδες, αντίστοιχα. Επομένως, βρίσκονταν στην αναλογία 2:1. Αμέσως μετά, συνέκρινε την αρχική χορδή των 12 βαρών με μια άλλη, η οποία βρισκόταν ακριβώς δίπλα σε εκείνη των 6, με τάση ισοδύναμη 8 βαρών. Η νέα αυτή συνήχηση (12:8) δεν ήταν άλλη από το σύμφωνο διάστημα της πέμπτης που, στην απλουστευμένη της μορφή, αντιστοιχεί στον αριθμητικό λόγο 3:2. Τέλος, το παιχνίδι των συσχετισμών φαίνεται πως έκλεισε με την εξακρίβωση ότι η χορδή με τη μέγιστη τάση των 12 βαρών, συνδυαζόμενη με μια άλλη των 9 βαρών, παρήγαγε το επίσης σύμφωνο διάστημα της τετάρτης (12:9, δηλαδή 4:3).

- *Η Διήγηση του Πλάτωνα*

Στο βιλίο του «Greek Musical Writings», ο Barker παραθέτει , μέσα από τα λόγια του Πλάτωνα στο *Phaedo (Φαίδων)*, το πείραμα που διεξήγαγε ο Ίππασος ο Μεταποντίνος: «Γλαύκου τέχνη ση<μείωσαι> πα<ροιμίαν> ἐπὶ τῶν μὴ ῥᾳδίως κατεργαζομένων, ἤτοι ἐπὶ τῶν πάνυ ἐπιμελῶς καὶ ἐντέχνως εἰργασμένων.

[η φράση «Γλαύκου τέχνη» λέγεται είτε για πράγματα που δεν επιτυγχάνονται εύκολα, είτε για πράγματα που φτιάχνονται με μεγάλη ικανότητα και φροντίδα]

«῞Ιππασος γάρ τις κατεσκεύασε χαλκοῦς τέτταρας δίσκους οὕτως, ὥστε τὰς μὲν διαμέτρους αὐτῶν ἴσας ὑπάρχειν, τὸ δὲ τοῦ πρώτου δίσκου πάχος ἐπίτριτον μὲν εἶναι τοῦ δευτέρου, ἡμιόλιον δὲ τοῦ τρίτου, διπλάσιον δὲ τοῦ τετάρτου, κρουομένους δὲ τούτους ἐπιτελεῖν συμφωνίαν τινά»

[Ο Ίππασος ο Μεταποντίνος έφτιαξε τέσσερις χάλκινους δίσκους με τέτοιο τρόπο ώστε οι διάμετροί τους να είναι ίσες και, ειδικότερα, η λεπτότητα του πρώτου να είναι το επίτριτον (4:3) αυτής του δευτέρου, το ημιόλιον (3:2) αυτής του τρίτου και διπλάσια σε σχέση με αυτή του τετάρτου, με αποτέλεσμα κατά την κρούση τους να παράγεται αρμονία]

«καὶ λέγεται Γλαῦκον ἰδόντα τοὺς ἐπὶ τῶν δίσκων φθόγγους, πρῶτον ἐγχειρῆσαι δι' αὐτῶν χειρουργεῖν, καὶ ἀπὸ ταύτης τῆς πραγματείας ἔτι καὶ νῦν λέγεσθαι τὴν καλουμένην Γλαύκου τέχνην. μέμνηται δὲ τούτων ᾿Αριστόξενος ἐν τῷ περὶ τῆς μουσικῆς ἀκροάσεως καὶ <Νι>κοκλῆς ἐν τῷ περὶ θεωρίας»

[Και λέγεται ότι, όταν ο Γλαύκος παρατήρησε τις νότες που παρήγαγαν οι δίσκοι, ήταν ο πρώτος που καταπιάστηκε με τη σύνθεση μουσικής με αυτές και ότι, ως αποτέλεσμα της εμβάθυνσής του αυτής, οι άνθρωποι μιλούν για την «τέχνη του Γλαύκου»]

Ο Barker τονίζει το γεγονός ότι η διαδικασία που περιγράφει ο Ίππασος είναι σωστή, γιατί αν οι δίσκοι έχουν ίσες διαμέτρους, τότε η συχνότητα είναι ανάλογη της λεπτότητάς τους. Αυτό είναι φανερό και μέσα από τα λόγια του Πλάτωνα στο *Phaedo (Φαίδων)*, που δείχνουν την αμφισβήτησή του για την εγκυρότητα του πειράματος του Πυθαγόρα και την αποδοχή, εκ μέρους του, του πειράματος του Ίππασου:

«᾿Αλλὰ μέντοι, ὦ Σιμμία, οὐχ ἡ Γλαύκου τέχνη γέ μοι δοκεῖ εἶναι διηγήσασθαι ἅ γ' ἐστίν· ὡς μέντοι ἀληθῆ, χαλεπώτερόν μοι φαίνεται ἢ κατὰ τὴν Γλαύκου τέχνην, καὶ ἅμα μὲν ἐγὼ ἴσως οὐδ' ἂν οἷός τε εἴην, ἅμα δέ, εἰ καὶ ἠπιστάμην, ὁ βίος μοι δοκεῖ ὁ ἐμός, ὦ Σιμμία, τῷ μήκει τοῦ λόγου οὐκ ἐξαρκεῖν. τὴν μέντοι ἰδέαν τῆς γῆς οἵαν πέπεισμαι εἶναι, καὶ τοὺς τόπους αὐτῆς οὐδέν με κωλύει λέγειν».

- *Η Διήγηση του Θέωνα του Σμυρνέα*

Ο Θέων ο Σμυρνεύς, όπως καταγράφεται στις σελίδες του βιβλίου του Andrew Barker, δίνει τη δική του διήγηση για τον τρόπο με τον οποίο οι Πυθαγόρειοι έφθασαν στην ανακάλυψη των αριθμητικών σχέσεων των ήχων:

«ταύτας δὲ τὰς συμφωνίας οἱ μὲν ἀπὸ βαρῶν ἠξίουν λαμβάνειν, οἱ δὲ ἀπὸ μεγεθῶν, οἱ δὲ ἀπὸ κινήσεων [καὶ ἀριθμῶν], οἱ δὲ ἀπὸ ἀγγείων [καὶ μεγεθῶν]»

[κάποιοι θεώρησαν ότι θα ήταν σωστό να λάβουν αυτές τις συμφωνίες από βάρη, άλλοι από μεγέθη, άλλοι από κινήσεις και αριθμούς κι άλλοι από αγγεία]

«Λᾶσος δὲ ὁ Ἑρμιονεύς, ὥς φασι, καὶ οἱ περὶ τὸν Μεταποντῖνον Ἵππασον Πυθαγορικὸν ἄνδρα συνέπεσθαι τῶν κινήσεων τὰ τάχη καὶ τὰς βραδυτῆτας, δι' ὧν αἱ συμφωνίαι ... ἐν ἀριθμοῖς ἡγούμενος λόγους τοιούτους ἐλάμβανεν ἐπ' ἀγγείων»

[Ο Λάσος ο Ερμιονεύς (εικάζεται ότι είναι Πυθαγόρειος), λένε, και οι ακόλουθοί του συνέχισαν τη μελέτη της βραδύτητας και της ταχύτητας των κινήσεων μέσα από τις οποίες αναδύονται οι αρμονίες… Αν σκεφτεί κανείς ότι… στους αριθμούς, κατασκεύασε λόγους αυτών των ειδών σε αγγεία]

«ἴσων γὰρ ὄντων καὶ ὁμοίων πάντων τῶν ἀγγείων τὸ μὲν κενὸν ἐάσας, τὸ δὲ ἥμισυ ὑγροῦ <πληρώσας> ἐψόφει ἑκατέρῳ, καὶ αὐτῷ ἡ διὰ πασῶν ἀπεδίδοτο συμφωνία·»

[Όλα τα αγγεία ήταν ίσα και όμοια. Άφησε ένα άδειο, γέμισε μέχρι τη μέση ένα άλλο με υγρό και παρήγαγε ήχο στο καθένα. Έτσι προέκυψε η συμφωνία της οκτάβας]

«θάτερον δὲ πάλιν τῶν ἀγγείων κενὸν ἐῶν εἰς θάτερον τῶν τεσσάρων μερῶν τὸ ἓν ἐνέχεε, καὶ κρούσαντι αὐτῷ ἡ διὰ τεσσάρων συμφωνία ἀπεδίδοτο, ἡ δὲ διὰ πέντε, <ὅτε> ἓν μέρος τῶν τριῶν συνεπλήρου, οὔσης τῆς κενώσεως πρὸς τὴν ἑτέραν ἐν μὲν τῇ διὰ πασῶν ὡς β πρὸς ἕν, ἐν δὲ τῷ διὰ πέντε ὡς γ πρὸς β, ἐν δὲ τῷ διὰ τεσσάρων ὡς δ πρὸς γ»

[Ύστερα, αφήνοντας ένα αγγείο άδειο, γέμισε ένα άλλο κατά το ένα τέταρτο και κτυπώντας τα προέκυψε η τέταρτη συμφωνία, όπως προέκυψε η πέμπτη συμφωνία όταν γέμισε το ένα αγγείο κατά το ένα τρίτο. Τα κενά μέρη είχαν τη σχέση του δύο προς ένα στην οκτάβα, του τρία προς δύο στην πέμπτη και του τέσσερα προς τρία στην τετάρτη]

- *Η Διήγηση του Νικόμαχου*

Η διήγηση του Νικόμαχου στο *Enchiridion (Εγχειρίδιον)* είναι παρόμοια με αυτή του Ιάμβλιχου: «Τὴν δὲ κατ' ἀριθμὸν ποσότητα ταύτην ἥτε διὰ τεσσάρων χορδῶν ἀπόστασις ἥτε διὰ πέντε καὶ ἡ κατ' ἀμφοτέρων σύνοδον διὰ πασῶν λεγομένη καὶ ὁ προσκείμενος μεταξὺ τῶν δύο τετραχόρδων τόνος τρόπῳ τινὶ τοιούτῳ ὑπὸ τοῦ Πυθαγόρου καταληφθέντι ἔχειν ἐβεβαιοῦτο. ἐν φροντίδι ποτὲ καὶ διαλογισμῷ συντεταμένῳ ὑπάρχων, εἰ ἄρα δύναιτο τῇ ἀκοῇ βοήθειάν τινα ὀργανικὴν ἐπινοῆσαι παγίαν καὶ ἀπαραλόγιστον, οἵαν ἡ μὲν ὄψις διὰ τοῦ διαβήτου καὶ διὰ τοῦ κανόνος ἢ καὶ διὰ τῆς διόπτρας ἔχει, ἡ δ' ἁφὴ διὰ τοῦ ζυγοῦ ἢ διὰ τῆς τῶν μέτρων ἐπινοίας, παρά τι χαλκοτυπεῖον περιπατῶν ἔκ τινος δαιμονίου συντυχίας ἐπήκουσε ῥαιστήρων σίδηρον ἐπ' ἄκμονι ῥαιόντων καὶ τοὺς ἤχους παραμὶξ πρὸς ἀλλήλους συμφωνοτάτους ἀποδιδόντων πλὴν μιᾶς συζυγίας· ἐπ-εγίνωσκε δ' ἐν αὐτοῖς τὴν δὲ διὰ πασῶν καὶ τὴν διὰπέντε καὶ τὴν διὰ τεσσάρων συνῳδίαν. τὴν δὲ μεταξύτητα τῆς τε διὰ τεσσάρων καὶ τῆς διὰ πέντε ἀσύμφωνον μὲν ἑώρα αὐτὴν καθ' ἑαυτὴν, συμπληρωτικὴν δὲ ἄλλως τῆς ἐν αὐτοῖς μείζονος. ἄσμενος δὴ ὡς κατὰ θεὸν ἀνυομένης αὐτῷ τῆς προθέσεως εἰσέδραμεν εἰς τὸ χαλκεῖον καὶ ποικίλαις πείραις παρὰ τὸν ἐν τοῖς ῥαιστῆρσιν ὄγκον εὑρὼν τὴν διαφορὰν τοῦ ἤχου, ἀλλ' οὐ παρὰ τὴν τῶν ῥαιόντων βίαν οὐδὲ παρὰ τὰ σχήματα τῶν σφυρῶν οὐδὲ παρὰ τὴν τοῦ ἐλαυνομένου σιδήρου μετάθεσιν, σηκώματα ἀκριβῶς ἐκλαβὼν καὶ ῥοπὰς ἰσαιτάτας τῶν ῥαιστήρων πρὸς ἑαυτὸν ἀπηλλάγη. καὶ ἀπό τινος ἑνὸς πασσάλου διὰ γώνων ἐμπεπηγότος τοῖς τοίχοις, ἵνα μὴ κἀκ τούτου διαφορά τις ὑποφαίνηται ἢ ὅλως ὑπονοῆται πασσάλων ἰδιαζόντων παραλλαγή, ἀπαρτήσας τέσσαρας χορδὰς ὁμοΰλους καὶ ἰσοκώλους, ἰσοπαχεῖς τε καὶ ἰσοστρόφους ἑκάστην ἐφ' ἑκάστης ἐξήρτησεν, ὁλκὴν προσδήσας ἐκ τοῦ κάτωθεν μέρους. τὰ δὲ μήκη τῶν χορδῶν μηχανησάμενος ἐκ παντὸς ἰσαίτατα, εἶτα κρούων ἀνὰ δύο ἅμα χορδὰς ἐναλλὰξ συμφωνίας εὕρισκε τὰς προλεχθείσας, ἄλλην ἐν ἄλλῃ συζυγίᾳ. τὴν μὲν γὰρ ὑπὸ τοῦ μεγίστου ἐξαρτήματος τεινομένην πρὸς τὴν ὑπὸ τοῦ μικροτάτου διὰ πασῶν φθεγγομένην κατελάμβανεν. ἦν δὲ ἡ μὲν δώδεκά τινων ὁλκῶν, ἡ δὲ ἕξ. ἐν διπλασίῳ δὴ λόγῳ ἀπέφαινε τὴν διὰ πασῶν, ὅπερ καὶ αὐτὰ τὰ βάρη ὑπέφαινε. τὴν δ' αὖ μεγίστην πρὸς τὴν παρὰ τὴν μικροτάτην (οὖσαν ὀκτὼ ὁλκῶν) διὰ πέντε συμφωνοῦσαν, ἔνθεν ταύτην ἀπέφαινεν ἐν ἡμιολίῳ λόγῳ, ἐν ᾧπερ καὶ αἱ ὁλκαὶ ὑπῆρχον πρὸς ἀλλήλας· πρὸς δὲ τὴν μεθ' ἑαυτὴν μὲν τῷ βάρει, τῶν δὲ λοιπῶν μείζονα, ἐννέα σταθμῶν ὑπάρχουσαν, τὴν διὰ τεσσάρων, ἀναλόγως τοῖς βρίθεσι. καὶ ταύτην δὴ ἐπίτριτον ἄντικρυς κατελαμβάνετο, ἡμιολίαν τὴν αὐτὴν φύσει ὑπάρχουσαν τῆς μικροτάτης, (τὰ γὰρ ἐννέα πρὸς τὰ εξ οὕτως ἔχει,) ὅνπερ τρόπον ἡ παρὰ τὴν μικρὰν ἡ ὀκτὼ πρὸς μὲν τὴν τὰ εξ ἔχουσαν ἐν ἐπιτρίτῳ ἦν, πρὸς δὲ τὴν τὰ δώδεκα ἐν ἡμιολίῳ. τὸ ἄρα μεταξὺ τῆς διὰ πέντε καὶ τῆς διὰ τεσσάρων τουτέστιν ᾧ ὑπερέχει ἡ διὰ πέντε τῆς διὰ τεσσάρων, ἐβεβαιοῦτο ἐν ἐπογδόῳ λόγῳ ὑπάρχειν, ἐν ᾧπερ τὰ ἐννέα πρὸς τὰ ὀκτώ. ἑκατέρως τε ἡ διὰ πασῶν σύστημα ἠλέγχετο τῆς διὰ πέντε καὶ διὰ τεσσάρων ἐν συναφῇ, ὡς ὁ διπλάσιος λόγος ἤτοι ἡμιολίου τε καὶ ἐπιτρίτου, οἷον δώδεκα ὀκτὼ εξ, ἢ ἀναστρόφως τῆς διὰ τεσσάρων καὶ διὰ πέντε, ὡς τὸ διπλάσιον ἐπιτρίτου τε καὶ ἡμιολίου, οἷον δώδεκα ἐννέα εξ ἐν τάξει τοιαύτῃ. τυλώσας δὲ καὶ τὴν χεῖρα καὶ τὴν ἀκοὴν πρὸς τὰ ἐξαρτήματα καὶ βεβαιώσας πρὸς αὐτὰ τὸν τῶν σχέσεων λόγον, μετέθηκεν εὐμηχάνως τὴν μὲν τῶν χορδῶν κοινὴν ἀπόδεσιν τὴν ἐκ τοῦ διαγωνίου πασσάλου εἰς τὸν τοῦ ὀργάνου βατῆρα, ὃν χορδότονον ὠνόμαζε, τὴν δὲ ποσὴν ἐπίτασιν ἀναλόγως τοῖς βάρεσιν εἰς τὴν τῶν κολλάβων ἄνωθεν σύμμετρον περιστροφήν. ἐπιβάθρᾳ τε ταύτῃ χρώμενος καὶ οἷον ἀνεξαπατήτῳ γνώμονι εἰς ποικίλα ὄργανα τὴν πεῖραν λοιπὸν ἐξέτεινε, λεκίδων τε κροῦσιν καὶ αὐλοὺς καὶ σύριγγας καὶ μονόχορδα καὶ τρίγωνα καὶ τὰ παραπλήσια, καὶ σύμφωνον εὕρισκεν ἐν ἅπασι καὶ ἀπαράλλακτον τὴν δι' ἀριθμοῦ κατάληψιν. ὀνομάσας δὲ ὑπάτην μὲν τὸν τοῦ εξ ἀριθμοῦ κοινωνοῦντα φθόγγον, μέσην δὲ τὸν τοῦ ὀκτὼ, ἐπίτριτον αὐτοῦ τυγχάνοντα, παραμέσην δὲ τὸν τοῦ ἐννέα, τόνῳ τοῦ μέσου ὀξύτερον καὶ δὴ καὶ ἐπόγδοον, νήτην δὲ τὸν τοῦ δώδεκα, καὶ τὴς μεταξύτητας κατὰ τὸ διατονικὸν γένος συναναπληρώσας φθόγγοις ἀναλόγοις οὕτως τὴν ὀκτάχορδον ἀριθμοῖς συμφώνοις ὑπέταξε, διπλασίῳ ἡμιολίῳ ἐπιτρίτῳ καὶ τῇ τούτων διαφορᾷ ἐπογδόῳ.»

[τα διαστήματα της τετάρτης και της πέμπτης και του συνδυασμού αυτών, της οκτάβας, και του τόνου που βρίσκεται επιπροσθέτως ανάμεσα στα δύο τετράχορδα καθιερώθηκαν ως έχοντα αυτή την αριθμητική ποσότητα από τον Πυθαγόρα. Η μέθοδος που ακολούθησε ήταν η εξής: μια μέρα βυθίστηκε στις σκέψεις για να δει αν θα μπορούσε να επινοήσει κάποιο οργανικό βοήθημα για την ακοή, το οποίο θα ήταν συνεπές και όχι επιρρεπές σε λάθη, με τον ίδιο τρόπο που και η όραση βοηθάται από τους διαβήτες, τον κανόνα και τη διόπτρα, η αφή από την ισορροπία και από τη διαίρεση των μέτρων. Χάρη σε μια θεόσταλτη ευκαιρία, πέρασε από το εργαστήρι ενός σιδηρουργού κι άκουσε τα σφυριά να κτυπούν στο σίδερο του αμονιού, δίνοντας ήχους απολύτως σύμφωνους μεταξύ τους, με εξαίρεση ένα ζευγάρι. Και αναγνώρισε ανάμεσά τους τη διαπασών, την πέμπτη και την τετάρτη. Παρατήρησε ότι αυτό που ήταν ανάμεσα στην τετάρτη και την πέμπτη ήταν παράφωνο αλλά και αναγκαίο να γεμίσει το μεγαλύτερο από αυτά τα διαστήματα. Υπερευχαριστημένος που, με τη βοήθεια του Θεού, το σχέδιό του είχε εκπληρωθεί, έτρεξε στο σιδηρουργείο και, μέσα από μια μεγάλη ποικιλία πειραμάτων, ανακάλυψε ότι αυτό που βρισκόταν σε άμεση σχέση με τη διαφορά στον ήχο ήταν το βάρος των σφυριών κι όχι η δύναμη των κτυπημάτων ή το σχήμα των σφυριών ή η διαφορετικότητα του εκάστοτε σίδερου. Τα ζύγισε επακριβώς και πήρε για προσωπική του χρήση κομμάτια μετάλλου ακριβώς ίσα σε βάρος με τα σφυριά. Μετά έφτιαξε μια μονή ράβδο από τη μια γωνιά ως την άλλη κάτω από τη στέγη του, έτσι ώστε να μην προκύψει κάποια παραλλαγή ή υποψία παραλλαγής από τις ιδιομορφίες των διαφορετικών ράβδων και κρέμασε από αυτή τέσσερις χορδές, από το ίδιο υλικό, αποτελούμενες από τον ίδιο αριθμό νημάτων, με την ίδια λεπτότητα και τυλιγμένες στην ίδια έκταση. Ύστερα έδεσε ένα βαρίδιο στο κάτω μέρος κάθε χορδής κι έχοντάς το κανονίσει έτσι ώστε το μήκος κάθε χορδής να είναι ακριβώς το ίδιο, χτυπούσε τις χορδές ανά δύο και έβρισκε τις συμφωνίες που προαναφέρθηκαν, διαφορετική συμφωνία για κάθε ζεύγος χορδών. Αντιλήφθηκε ότι η τεντωμένη χορδή με το μεγαλύτερο αντικείμενο ακούστηκε σε μια οκτάβα από την τεντωμένη χορδή με το μικρότερο αντικείμενο. Το πρώτο αντικείμενο είχε βάρος δώδεκα μονάδων και το τελευταίο έξι μονάδων. Έτσι έδειξε ότι η οκτάβα είναι ο λόγος δύο προς ένα, όπως έδειξαν τα ίδια τα βάρη. Βρήκε ότι το μεγαλύτερο ακουγόταν σε μια πέμπτη από το μικρότερο (το οποίο ζύγιζε οκτώ μονάδες βάρους) κι από αυτό κατάλαβε ότι είναι σε ημιόλιο λόγο, λόγος που είχαν μεταξύ τους τα δύο βάρη. Σε σχέση με το βάρος των εννέα μονάδων, ακουγόταν στο διάστημα μιας τετάρτης. Και κατάλαβε ότι αυτός ήταν ο επίτριτος λόγος κι ότι αυτή η ίδια χορδή ήταν σε ημιόλιο λόγο με αυτή που είχε το μικρότερο βάρος (αφού ήταν 9:6). Και με παρόμοιο τρόπο, η χορδή με το βάρος των οκτώ μονάδων ήταν σε επίτριτο λόγο με αυτή των έξι και σε ημιόλιο λόγο με αυτή των δώδεκα. Και απέδειξε ότι αυτό που βρίσκεται μεταξύ της τετάρτης και της πέμπτης, δηλαδή αυτό κατά το οποίο η πέμπτη ξεπερνά την τετάρτη, είναι σε επόγδοο λόγο, δηλαδή 9:8. Αποδείχθηκε επίσης ότι η οκτάβα μπορεί να κατασκευαστεί με δύο τρόπους, είτε με τη σύζευξη της πέμπτης με την τετάρτη, μια και ο λόγος δύο προς ένα προκύπτει από τη σύζευξη του ημιολίου και του επίτριτου (όπως με τους αριθμούς 12, 8, 6) ή με τον ανάποδο τρόπο, με τη σύζευξη της τετάρτης με την πέμπτη, μια και ο λόγος δύο προς ένα αποτελείται από τη σύζευξη του επίτριτου με το ημιόλιο (όπως με τους αριθμούς 12, 9, 6 που διατάσσονται με αυτή τη σειρά). Έχοντας δουλέψει με τα βάρη, μέχρι να πονέσουν χέρια και αυτιά κι έχοντας αποδείξει με αναφορά σε αυτά τους λόγους που ταίριαζαν στις θέσεις τους, μετέφερε επιδέξια το κοινό σημείο πρόσδεσης των χορδών, όπου όλες μαζί κρέμονταν από τη διαγώνια ράβδο, σε ένα σημείο πάνω στο όργανό του, ένα σημείο που αποκαλούσε «χορδότονον» και μετέφερε τις ποσότητες της τάσης με τους ίδιους λόγους που είχαν παραχθεί από τα βάρη με μια περιστροφή ανάλογου βαθμού στους «κολλαβούς» στο πάνω μέρος. Χρησιμοποιώντας αυτό ως θεμέλιο και σαν να ήταν αναμφισβήτητη ένδειξη, προχώρησε στην επέκταση των ερευνών του σε πολλά είδη οργάνων, όπως σε δοχεία, αυλούς, σειρήνες, μονόχορδα, τρίγωνα και άλλα και σε όλα έβρισκε την κατανόηση του αριθμού ίδια και απαράλλακτη. Ονόμασε τη νότα που χαρακτηριζόταν από τον αριθμό έξι «υπάτη», αυτή που χαρακτηριζόταν από το οκτώ «μέση», η οποία είναι σε επίτριτο λόγο με την «υπάτη», αυτή που χαρακτηρίζεται από το εννέα «παραμέση», η οποία είναι ένα τόνο ψηλότερη από τη μέση κι έτσι έχουν επόγδοο λόγο κι αυτή που χαρακτηρίζεται από το δώδεκα την ονόμασε «νήτη» ή «νεάτη». Την ίδια στιγμή συμπλήρωσε τα κενά μεταξύ τους σύμφωνα με το διατονικό γένος, με νότες σε καθαρούς λόγους, φτιάχνοντας έτσι το οκτάχορδο υποταγμένο στους σύμφωνους αριθμούς, δηλαδή στο λόγο δύο, στον ημιόλιο και τον επίτριτο λόγο και στη διαφορά των δύο τελευταίων, τον επόγδοο λόγο]

Ο Πυθαγόρας, λένε, ανακάλυψε τη θεωρία της μουσικής. Αυτός και οι μαθητές του οδήγησαν την προσοχή τους στο γεγονός ότι τα μουσικά διαστήματα μπορούν να εκφρασθούν ως αριθμητικοί λόγοι και ότι τα σύμφωνα διαστήματα εκφράζονται από λόγους, των οποίων οι όροι είναι πολύ μικροί αριθμοί, π.χ. 2:1. Στους Πυθαγορείους αποδίδεται η διαίρεση της οκτάβας σε μια τετάρτη και μια πέμπτη, η κατασκευή της κλίμακας με τη χρήση του τόνου (9:8) και η ανακάλυψη του «πυθαγορείου κόμματος», που είναι η διαφορά 12 πέμπτων από 7 οκτάβες.

Δεν είναι εύκολο να έχει κανείς μια ξεκάθαρη εικόνα της ιστορίας των Πυθαγορείων πριν το 400 π.Χ., ούτε είναι σαφές μέχρι τώρα κατά πόσο ο ίδιος ο Πυθαγόρας συνεισέφερε στα μαθηματικά και μουσικά θεωρήματα, τα οποία του έχουν αποδοθεί. Υπήρχε μια ομάδα διανοητών, οι οποίοι έδρασαν στο τέλος του 5^{ου} π.Χ αιώνα, λίγο πριν τον Πλάτωνα, και οποιαδήποτε πληροφορία έχουμε για την πυθαγόρεια σκέψη προέρχεται από αυτούς, μάλιστα όχι απευθείας, αλλά μέσα από τα κείμενα του Πλάτωνα και του Αριστοτέλη. Κάποιοι αποδίδουν σχεδόν όλη την πυθαγόρεια επιστήμη σ’ αυτούς, ενώ άλλοι πιστεύουν πως στον Πυθαγόρα ανήκουν τουλάχιστον εκείνα τα θεωρήματα που φέρουν το όνομά του.

Ακόμα κι αν δεν μπορούμε πια να συνηγορήσομε υπέρ της μιας ή της άλλης άποψης, μπορούμε να κάνουμε έναν απολογισμό της μουσικής θεωρίας των Πυθαγορείων. Ο απολογισμός αυτός δεν μπορεί να ξεκινήσει πριν από το 400 π.Χ., εποχή για την οποία μόνο εικασίες μπορούμε να κάνουμε. Το 400 π.Χ. ολοκληρώθηκε η δημιουργική φάση των πυθαγόρειων μαθηματικών, όπως επίσης και η περίοδος της ελληνικής μουσικής, η οποία άνθισε τον 5^{ο} αιώνα.

<u>Η Προέλευση της Αριθμητικής Θεωρίας των Λόγων</u>

Σε όλα τα παραπάνω πειράματα, το κοινό συμπέρασμα είναι το εξής: το μουσικό διάστημα της οκτάβας σχετίζεται με το λόγο 2:1 κι αυτό γιατί, όταν χτυπάμε μια χορδή μισού μήκους, ο τόνος που προκύπτει είναι κατά μια οκτάβα υψηλότερος σε σχέση με αυτόν που παράγεται από μια ολόκληρη χορδή. Επίσης, το μουσικό διάστημα μιας πέμπτης σχετίζεται με το λόγο 3:2, ενώ αυτό της τετάρτης με το λόγο 4:3. Έτσι, σε κάθε μουσικό διάστημα αντιστοιχούσε ένας λόγος απλών αριθμών και αυτό σηματοδοτεί τη γέννηση της θεωρίας αναλογιών. Μάλιστα, αποτελεί μυστήριο γιατί η λέξη «λόγος» χρησιμοποιήθηκε για μια τέτοια μαθηματική έννοια. Σύμφωνα με τον κ. Σ. Νεγρεπόντη, θα μπορούσαμε να τη θεωρήσουμε ως μια συντομογραφία της παρακάτω πρότασης:

«Το μουσικό διάστημα $\left\{\begin{matrix} \text{οκτάβα} \\ \text{πέμπτη} \\ \text{τετάρτη} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{matrix}\right\}$ έχει το λόγο του στους αριθμούς $\left\{\begin{matrix} 2:1 \\ 3:2 \\ 4:3 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{matrix}\right\}$». Ας σημειωθεί στο σημείο αυτό ότι η λέξη «λόγος» φέρει στην αρχαία χρήση της την εκδοχή της αιτίας, της λογικής βάσης.

Η σύνθεση δύο μουσικών διαστημάτων αντιστοιχεί στο αποτέλεσμα (συγκείμενος λόγος) των λόγων που αντιστοιχούν στα επιμέρους συντιθέμενα διαστήματα. Έτσι, η οκτάβα είναι το αποτέλεσμα της σύνθεσης της τετάρτης με την πέμπτη και αντίστροφα, ενώ, από την άλλη, το 2:1 είναι ο συγκείμενος λόγος του 3:2 και του 4:3. Σύμφωνα με τον κ. Σ. Νεγρεπόντη, θα μπορούσαμε να υποθέσουμε ότι η πρώιμη αριθμητική θεωρία των λόγων επικεντρώνεται στη σύνθεση των λόγων και σχετίζεται βαθιά με τα ακουστικά και αρμονικά πειράματα. Κι αυτό γιατί η δομή των αριθμητικών βιβλίων VII – VIII των *Στοιχείων* περί θεωρίας λόγων αριθμών δεν χρειάζεται απαραίτητα τον ευκλείδειο αλγόριθμο, δηλαδή τις προτάσεις VII.5 – 19, VII.3 – 4.

Ξεκινώντας με την ιδιότητα «Εναλλάξ» των αριθμών (Πρόταση VII.13), αυτή καθιερώθηκε από τα ακουστικά πειράματα των Πυθαγορείων:

«Ἐὰν τέσσαρες ἀριθμοὶ ἀνάλογον ὦσιν, καὶ ἐναλλὰξ ἀνάλογον ἔσονται.»
[Αν τέσσερις αριθμοί είναι σε αναλογία, και εναλλάξ θα είναι σε αναλογία]

<u>Απόδειξη</u>
« Ἔστωσαν τέσσαρες ἀριθμοὶ ἀνάλογον οἱ Α, Β, Γ, Δ, ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β, οὕτως ὁ Γ πρὸς τὸν Δ»
[Έστω τέσσερις αριμοί σε αναλογία, οι Α, Β, Γ, Δ τέτοιοι ώστε, ό,τι είναι ο Α προς τον Β να είναι και ο Γ προς τον Δ]

«λέγω, ὅτι καὶ ἐναλλὰξ ἀνάλογον ἔσονται, ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Γ, οὕτως ὁ Β πρὸς τὸν Δ»
[Λέγω ότι και εναλλάξ θα είναι σε αναλογία, δηλαδή ό,τι είναι ο Α προς τον Γ θα είναι και ο Β προς τον Δ]

« Ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β, οὕτως ὁ Γ πρὸς τὸν Δ, ὃ ἄρα μέρος ἐστὶν ὁ Α τοῦ Β ἢ μέρη, τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶ καὶ ὁ Γ τοῦ Δ ἢ τὰ αὐτὰ μέρη.»
[Διότι, επειδή ο Α ως προς τον Β είναι ό,τι και ο Γ ως προς τον Δ, τότε ό,τι μέρος ή μέρη είναι ο Α του Β, το ίδιο θα είναι και ο Γ του Δ (ορισμός 21)]

«ἐναλλὰξ ἄρα, ὃ μέρος ἐστὶν ὁ Α τοῦ Γ ἢ μέρη, τὸ αὐτὸ μέρος ἐστὶ καὶ ὁ Β τοῦ Δ ἢ τὰ αὐτὰ μέρη»
[Άρα και εναλλάξ, ό,τι μέρος ή μέρη είναι ο Α του Γ, το ίδιο θα είναι και ο Β του Δ]

« ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Γ, οὕτως ὁ Β πρὸς τὸν Δ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.»

[Άρα, ό,τι είναι το Α ως προς το Γ, το ίδιο θα είναι και το Β ως προς το Δ. Το οποίο έπρεπε να αποδειχθεί]

$$\text{Δηλαδή, αν } \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} \text{ , τότε } \frac{\alpha}{\gamma} = \frac{\beta}{\delta}$$

Μάλιστα, επιβεβαίωση των παραπάνω αποτελεί το κείμενο του Νικόμαχου που προαναφέρθηκε. Πιο συγκεκριμένα:

$$\text{αν } \frac{12}{9} = \frac{8}{6} \text{ , τότε } \frac{12}{8} = \frac{9}{6}$$

Από την ιδιότητα «Εναλλάξ», μπορούμε να αντλήσουμε δύο βασικές ιδιότητες, την «Δι' ίσων» ιδιότητα VII.14 και τις ιδιότητες VII.17 – 18. Η «Δι' ίσων» ιδιότητα λέει τα εξής:

«Ἐὰν ὦσιν ὁποσοιοῦν ἀριθμοὶ καὶ ἄλλοι αὐτοῖς ἴσοι τὸ πλῆθος σύν δυο λαμβανόμενοι καὶ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ, καὶ δι' ἴσου ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ ἔσονται.»
[Αν υπάρχουν οσοιδήποτε αριθμοί και άλλοι ίσοι κατά το πλήθος προς αυτούς και ανά δύο λαμβανόμενοι έχουν τον ίδιο λόγο, τότε και δι' ίσου θα βρίσκονται στον ίδιο λόγο.]

<u>Απόδειξη</u>
«Ἔστωσαν ὁποσοιοῦν ἀριθμοὶ οἱ Α, Β, Γ καὶ ἄλλοι αὐτοῖς ἴσοι τὸ πλῆθος σύνδυο λαμβανόμενοι ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ οἱ Δ, Ε, Ζ, ὡς μὲν ὁ Α πρὸς τὸν Β, οὕτως ὁ Δ πρὸς τὸν Ε, ὡς δὲ ὁ Β πρὸς τὸν Γ, οὕτως ὁ Ε πρὸς τὸν Ζ»
['Εστω οσοιδήποτε αριθμοί Α, Β, Γ και άλλοι ίσοι κατά το πλήθος προς αυτούς, λαμβανόμενοι δε ανά δύο και έχοντες τον ίδιο λόγο, οι Δ, Ε, Ζ, έτσι ώστε ό,τι είναι ο Α προς τον Β να είναι και ο Δ προς τον Ε, ό,τι είναι ο Β προς τον Γ να είναι ο Ε προς τον Ζ]

«λέγω, ὅτι καὶ δι' ἴσου ἐστὶν ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Γ, οὕτως ὁ Δ πρὸς τὸν Ζ»
[Λέω ότι και δι' ίσου είναι όπως ο Α προς τον Γ, έτσι και ο Δ προς τον Ζ]

« Ἐπεὶ γάρ ἐστιν ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β, οὕτως ὁ Δ πρὸς τὸν Ε, ἐναλλὰξ ἄρα ἐστὶν ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Δ, οὕτως ὁ Β πρὸς τὸν Ε»
[Διότι, επειδή είναι ο Α προς τον Β ό,τι και ο Δ προς τον Ε, τότε εναλλάξ θα είναι ο Α προς τον Δ ό,τι και ο Β προς τον Ε (Πρόταση 13)]

«πάλιν, ἐπεί ἐστιν ὡς ὁ Β πρὸς τὸν Γ, οὕτως ὁ Ε πρὸς τὸν Ζ, ἐναλλὰξ ἄρα ἐστὶν ὡς ὁ Β πρὸς τὸν Ε, οὕτως ὁ Γ πρὸς τὸν Ζ. ὡς δὲ ὁ Β πρὸς τὸν Ε, οὕτως ὁ Α πρὸς τὸν Δ»
[Πάλι, επειδή είναι ο Β προς τον Γ ό,τι και ο Ε προς τον Ζ, τότε εναλλάξ θα είναι ο Β προς τον Ε ό,τι και ο Γ προς τον Ζ (Πρόταση 13). Όπως δε ο Β προς τον Ε, έτσι και ο Α προς τον Δ]

«καὶ ὡς ἄρα ὁ Α πρὸς τὸν Δ, οὕτως ὁ Γ πρὸς τὸν Ζ· ἐναλλὰξ ἄρα ἐστὶν ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Γ, οὕτως ὁ Δ πρὸς τὸν Ζ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι»

[Και άρα, ο Α είναι προς τον Δ ό,τι και ο Γ προς τον Ζ. Άρα, εναλλάξ, ό,τι είναι ο Α προς τον Γ, το ίδιο θα είναι και ο Δ προς τον Ζ. Το οποίο έπρεπε να αποδειχθεί]

$$\text{Δηλαδή, αν } \frac{\alpha}{\beta}=\frac{\delta}{\varepsilon}, \frac{\beta}{\gamma}=\frac{\varepsilon}{\zeta} \text{ , τότε } \frac{\alpha}{\gamma}=\frac{\delta}{\zeta}$$

Η ιδιότητα αυτή είναι μια απλή συνέπεια της «Εναλλάξ» ιδιότητας διότι: από την υπόθεση έχουμε ότι $\frac{\alpha}{\delta}=\frac{\beta}{\varepsilon}=\frac{\gamma}{\zeta}$. Τότε $\frac{\alpha}{\delta}=\frac{\gamma}{\zeta}$ κι επομένως, με τη βοήθεια της ιδιότητας «Εναλλάξ» και πάλι, έχουμε ότι $\frac{\alpha}{\gamma}=\frac{\delta}{\zeta}$.

Η ιδιότητες VII.17 – 18 λένε τα εξής:

<u>Πρόταση VII.17</u>
«Ἐὰν ἀριθμὸς δύο ἀριθμοὺς πολλαπλασιάσας ποιῇ τινας, οἱ γενόμενοι ἐξ αὐτῶν τὸν αὐτὸν ἕξουσι λόγον τοῖς πολλαπλασιασθεῖσιν»
[Εάν ένας αριθμός πολλαπλασιάσει δύο αριθμούς, θα προκύψουν γινόμενα τα οποία θα έχουν τον ίδιο λόγο που θα έχουν και οι πολλαπλασιασθέντες αριθμοί]

<u>Απόδειξη</u>
« Ἀριθμὸς γὰρ ὁ Α δύο ἀριθμοὺς τοὺς Β, Γ πολλαπλασιάσας τοὺς Δ, Ε ποιείτω· λέγω, ὅτι ἐστὶν ὡς ὁ Β πρὸς τὸν Γ, οὕτως ὁ Δ πρὸς τὸν Ε.»
[Διότι ο αριθμός Α, αν πολλαπλασιάσει τους Β και Γ, έστω ότι δίνει τους Δ, Ε. Λέγω ότι ο Β προς τον Γ είναι ό,τι και ο Δ προς τον Ε]

«Ἐπεὶ γὰρ ὁ Α τὸν Β πολλαπλασιάσας τὸν Δ πεποίηκεν, ὁ Β ἄρα τὸν Δ μετρεῖ κατὰ τὰς ἐν τῷ Α μονάδας. μετρεῖ δὲ καὶ ἡ Ζ μονὰς τὸν Α ἀριθμὸν κατὰ τὰς ἐν αὐτῷ μονάδας»
[Διότι, επειδή ο Α πολλαπλασιάζοντας τον Β δίνει τον Δ, άρα ο Β μετρεί τον Δ κατά Α μονάδες. Και η μονάδα Ζ μετρεί τον αριθμό Α κατά Α μονάδες]

« ἰσάκις ἄρα ἡ Ζ μονὰς τὸν Α ἀριθμὸν μετρεῖ καὶ ὁ Β τὸν Δ. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ Ζ μονὰς πρὸς τὸν Α ἀριθμόν, οὕτως ὁ Β πρὸς τὸν Δ.»
[Άρα τις ίδιες φορές η μονάδα Ζ μετρεί τον αριθμό Α, όσες και ο Β τον Δ. Άρα ό,τι είναι η μονάδα Ζ προς τον αριθμό Α, είναι και ο Β προς τον Δ (ορισμός 21)]

« διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὡς ἡ Ζ μονὰς πρὸς τὸν Α ἀριθμόν, οὕτως ὁ Γ πρὸς τὸν Ε· καὶ ὡς ἄρα ὁ Β πρὸς τὸν Δ, οὕτως ὁ Γ πρὸς τὸν Ε. ἐναλλὰξ ἄρα ἐστὶν ὡς ὁ Β πρὸς τὸν Γ, οὕτως ὁ Δ πρὸς τὸν Ε· ὅπερ ἔδει δεῖξαι»
[Γι' αυτούς τους λόγους, ό,τι είναι η μονάδα Ζ προς τον αριθμό Α, έτσι είναι και ο Γ προς τον Ε. Άρα, εναλλάξ είναι ο Β προς τον Γ ό,τι και ο Δ προς τον Ε (Πρόταση 13). Το οποίο έπρεπε να αποδειχθεί]

<u>Πρόταση VII.18</u>
«Ἐὰν δύο ἀριθμοὶ ἀριθμόν τινα πολλαπλασιάσαντες ποιῶσί τινας, οἱ γενόμενοι ἐξ αὐτῶν τὸν αὐτὸν ἕξουσι λόγον τοῖς πολλαπλασιάσασιν.»
[Αν δύο αριθμοί πολλαπλασιάσουν έναν αριθμό και δώσουν κάποια γινόμενα, τότε τα γινόμενα αυτά θα έχουν τον ίδιο λόγο με αυτόν των πολλαπλασιαστών]

Απόδειξη

«Δύο γὰρ ἀριθμοὶ οἱ Α, Β ἀριθμόν τινα τὸν Γ πολλαπλασιάσαντες τοὺς Δ, Ε ποιείτωσαν· λέγω, ὅτι ἐστὶν ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β, οὕτως ὁ Δ πρὸς τὸν Ε.»

[Διότι, έστω ότι δύο αριθμοί Α και Β πολλαπλασιάζουν κάποιον αριθμό Γ και δίνουν τους αριθμούς Δ και Ε. Λέγω ότι ο Α είναι ως προς τον Β ό,τι και ο Δ ως προς τον Ε.]

« Ἐπεὶ γὰρ ὁ Α τὸν Γ πολλαπλασιάσας τὸν Δ πεποίηκεν, καὶ ὁ Γ ἄρα τὸν Α πολλαπλασιάσας τὸν Δ πεποίηκεν. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ὁ Γ τὸν Β πολλαπλασιάσας τὸν Ε πεποίηκεν»

[Διότι, επειδή ο Α πολλαπλασιάζει τον Γ και δίνει Δ, άρα και ο Γ πολλαπλασιάζει τον Α και δίνει Δ (θεώρημα 16). Για τους ίδιους λόγους και ο Γ πολλαπλασιάζει τον Β και δίνει τον Ε.]

«ἀριθμὸς δὴ ὁ Γ δύο ἀριθμοὺς τοὺς Α, Β πολλαπλασιάσας τοὺς Δ, Ε πεποίηκεν. ἔστιν ἄρα ὡς ὁ Α πρὸς τὸν Β, οὕτως ὁ Δ πρὸς τὸν Ε· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.»

[Ο αριθμός Γ, λοιπόν, πολλπλασιάζει δύο αριθμούς Α και Β και δίνει τος Δ, Ε. Άρα, ό,τι είναι ο Α προς τον Β είναι και ο Δ προς τον Ε (θεώρημα 17). Το οποίο έπρεπε να αποδειχθεί]

Δηλαδή, $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha\gamma}{\beta\gamma} = \frac{\gamma\alpha}{\gamma\beta}$

Αυτές οι ιδιότητες προκύπτουν από μια εφαρμογή της «εναλλάξ» ιδιότητας στην ισότητα: $\frac{\gamma}{1} = \frac{\alpha\gamma}{\gamma}$. Όμως, αυτή η ισότητα είναι συνέπεια των ορισμών της ισότητας λόγων (ορισμός VII.20) σε συνδυασμό με το σχετικό ορισμό του πολλαπλασιασμού (ορισμός VII.15).

Τέλος, οι παραπάνω ιδιότητες εφαρμόζονται ακριβώς για να κάνουν τον συγκείμενο λόγο καλά ορισμένο στην Πρόταση VIII.4:

«Λόγων δοθέντων ὁποσωνοῦν ἐν ἐλαχίστοις ἀριθμοῖς ἀριθμοὺς εὑρεῖν ἑξῆς ἀνάλογον ἐλαχίστους ἐν τοῖς δοθεῖσι λόγοις.»

[Δοθέντων οσωνδήποτε λόγων με ελάχιστους αριθμούς, να βρεθούν αριθμοί ελάχιστοι οι οποίοι να είναι σε συνεχή αναλογία με τους δοθέντες λόγους]

Δηλαδή, αν $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha_1}{\beta_1}$, $\frac{\gamma}{\delta} = \frac{\gamma_1}{\delta_1}$ τότε $\frac{\alpha\gamma}{\beta\delta} = \frac{\alpha_1\gamma_1}{\beta_1\delta_1}$

Πράγματι, από τις ιδιότητες VII.17 – 18, έχουμε ότι:

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha\gamma}{\beta\gamma}, \quad \frac{\alpha_1}{\beta_1} = \frac{\alpha_1\gamma_1}{\beta_1\gamma_1}$$

$$\frac{\gamma}{\delta} = \frac{\beta\gamma}{\beta\delta}, \quad \frac{\gamma_1}{\delta_1} = \frac{\beta_1\gamma_1}{\beta_1\delta_1}$$

Από την υπόθεση, όμως:

$$\frac{\alpha\gamma}{\beta\gamma} = \frac{\alpha_1\gamma_1}{\beta_1\gamma_1}, \quad \frac{\beta\gamma}{\beta\delta} = \frac{\beta_1\gamma_1}{\beta_1\delta_1}$$

Τότε, από την ιδιότητα «Δι' ίσων» έχουμε ότι:

$$\frac{\alpha\gamma}{\beta\delta} = \frac{\alpha_1\gamma_1}{\beta_1\delta_1}$$

Οι μουσικοί ήχοι φτάνουν στο αυτί ως μια συνεχής διαδικασία. Όταν το αυτί δέχεται μια μελωδία, αισθανόμαστε ότι μας συμπαρασύρει ένα κύμα αισθητικής ευχαρίστησης, το οποίο θα μπορούσαμε να παρομοιάσουμε με μια γραμμή σχεδιασμένη με συνεχή τρόπο. Το γεγονός αυτό αποτελεί μια εξήγηση για το γεγονός ότι στα Στοιχεία του Ευκλείδη οι αριθμοί αναπαρίστανται όχι με τελείες - που θα παρέπεμπαν στα διακριτό τρόπο αντιμετώπισης των αριθμών ως χαλίκια – αλλά εκλαμβάνονται ως ποσότητες, ευθύγραμμα τμήματα – που παραπέμπουν σε μια συνεχή έννοια του αριθμού. Το ίδιο συμβαίνει και στην *Κατατομή Κανόνος*.

Έτσι μπορούμε να δούμε ότι μέσα από τη μουσική και μέσα από το γεγονός ότι το θεωρούμενο ως συνεχές φαινόμενο της μουσικής αρμονίας έχει την πειραματική και λογική βάση του στη θεωρία λόγων των αριθμών, οι Πυθαγόρειοι κατέληξαν στο συμπέρασμα ότι όλα εξηγούνται με αριθμούς και συγκεκριμένα ότι οι λόγοι στη γεωμετρία είναι αριθμητικοί.

<u>Η Αναζήτηση ενός Κοινού Μουσικού Μέτρου</u>

Ας δούμε, κατ' αρχήν, τη γενική μορφή της ανθυφαιρετικής διαδικασίας: Δεδομένων δύο λόγων (ή δύο ομογενών ποσοτήτων) α και β, με $\alpha > \beta$ προχωρούμε ως εξής:

$\alpha = \beta^{n_1}\alpha_1$, με $\alpha_1 < \beta$

$\beta = {\alpha_1}^{n_2}\beta_1$, με $\beta_1 < \beta$

$\alpha_1 = {\beta_1}^{n_3}\alpha_2$, με $\alpha_2 < \beta_1$

$\beta_1 = {\alpha_2}^{n_4}\beta_2$, με $\beta_2 < \alpha_1$ κ.ο.κ.

Τονίζουμε στο σημείο αυτό ότι $\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2$ είναι λόγοι (ή ποσότητες, αντίστοιχα) και $n_1, n_2, \ldots$ είναι αριθμοί. Η παραπάνω διαδικασία είναι από μαθηματικής άποψης πολλαπλασιαστική.

Ωστόσο, κατά τη διαίσθηση των αρχαίων ήταν μια άτυπη προσθετική διαδικασία, μια και δεν είχε αναπτυχθεί ανάλυση μουσικών διαστημάτων. Αν αυτό είχε γίνει, τα πράγματα θα είχαν οδηγήσει στην ανακάλυψη της εκθετικής και λογαριθμικής συνάρτησης. Πιο συγκεκριμένα, αν υπήρχε η έννοια του λογαρίθμου, τότε η παραπάνω ανθυφαίρεση θα έπαιρνε την εξής προσθετική μορφή:

Δεδομένων δύο ομογενών ποσοτήτων α, β με $\alpha > \beta$ έχουμε:

$\alpha = n_1\beta + \alpha_1$, με $\alpha_1 < \beta$

$\beta = n_2\alpha_1 + \beta_1$, με $\beta_1 < \alpha_1$

$\alpha_1 = n_3\beta_1 + \alpha_2$, με $\alpha_2 < \beta_1$

$\beta_1 = n_4\alpha_2 + \beta_2$, με $\beta_2 < \alpha_2$ κ.ο.κ

Αυτή η διαδικασία είτε φτάνει σε κάποιο τελικό στάδιο, ή συνεχίζει επ' άπειρον. Γράφουμε $\text{Ανθ}[n_1, n_2, n_3, n_4, \dots]$ και εννοούμε μια πεπερασμένη ή μη σειρά αριθμών, αντίστοιχα. Στην περίπτωση που τα α, β είναι αριθμοί, πρόκειται για τον αλγόριθμο της ευκλείδειας διαίρεσης, ο οποίος σταματά σε ένα συγκεκριμένο στάδιο. Αυτή είναι μια μέθοδος εύρεσης του μέγιστου κοινού διαιρέτη δύο αριθμών, ενός κοινού μέτρου (Πρόταση VII.1 των *Στοιχείων* του Ευκλείδη). Από την άλλη μεριά, αν αυτή η διαδικασία συνεχίζεται επ' άπειρον, τότε δεν υπάρχει κοινό μέτρο για τις ποσότητες α, β, οι οποίες τότε είναι ασύμμετρες. Αυτό είναι και το περιεχόμενο των Προτάσεων X.1, 2, 3 των *Στοιχείων:*

Ορισμός

«Σύμμετρα μεγέθη λέγεται τὰ τῷ αὐτῷ μέτρῳ μετρούμενα, ἀσύμμετρα δέ, ὧν μηδὲν ἐνδέχεται κοινὸν μέτρον γενέσθαι».

[Σύμμετρα μεγέθη λέγονται τα μετρούμενα δια του αυτού μέτρου, ασύμμετρα δε εκείνα διά τα οποία δεν υπάρχει κοινόν μέτρον]

Πρόταση 1

«Ἔστω δύο μεγέθη ἄνισα τὰ ΑΒ, Γ, ὧν μεῖζον τὸ ΑΒ· λέγω, ὅτι, ἐὰν ἀπὸ τοῦ ΑΒ ἀφαιρεθῇ μεῖζον ἢ τὸ ἥμισυ καὶ τοῦ καταλειπομένου μεῖζον ἢ τὸ ἥμισυ, καὶ τοῦτο ἀεὶ γίγνηται, λειφθήσεταί τι μέγεθος, ὃ ἔσται ἔλασσον τοῦ Γ μεγέθους».

[Δοθέντων δύο άνισων μεγεθών, εάν από του μεγαλυτέρου αφαιρεθεί μεγαλύτερο του ημίσεος και από του υπολοίπου μεγαλύτερον του ημίσεος και τούτο γίνεται πάντοτε, θα υπολείπεται κάποιο μέγεθος το οποίο θα είναι μικρότερο του δοθέντος μικρότερου μεγέθους]

<u>Απόδειξη</u>

«Ἔστω δύο μεγέθη ἄνισα τὰ ΑΒ, Γ, ὧν μεῖζον τὸ ΑΒ»

[Έστω δύο μεγέθη άνισα τα ΑΒ, Γ των οποίων μεγαλύτερον το ΑΒ]

«λέγω, ὅτι, ἐὰν ἀπὸ τοῦ ΑΒ ἀφαιρεθῇ μεῖζον ἢ τὸ ἥμισυ καὶ τοῦ καταλειπομένου μεῖζον ἢ τὸ ἥμισυ, καὶ τοῦτο ἀεὶ γίγνηται»

[Λέγω ότι εάν από του ΑΒ αφαιρεθεί μεγαλύτερον του ημίσεος και από του υπολοίπου μεγαλύτερον του ημίσεος και τούτο γίνεται πάντοτε]

«λειφθήσεταί τι μέγεθος, ὃ ἔσται ἔλασσον τοῦ Γ μεγέθους»

[θα υπολείπεται κάποιο μέγεθος, το οποίο θα είναι μικρότερο του μεγέθους]

«Τὸ Γ γὰρ πολλαπλασιαζόμενον ἔσται ποτὲ τοῦ ΑΒ μεῖζον»

[Διότι το πολλαπλασιαζόμενον θα γίνει κάποτε μεγαλύτερον του ΑΒ]

«πεπολλαπλασιάσθω, καὶ ἔστω τὸ ΔΕ τοῦ μὲν Γ πολλαπλάσιον, τοῦ δὲ ΑΒ μεῖζον»

[Αν πολλαπλασιασθεί, και έστω το ΔΕ του μεν Γ πολλαπλάσιον, του δε ΑΒ μεγαλύτερον]

«καὶ διῃρήσθω τὸ ΔΕ εἰς τὰ τῷ Γ ἴσα τὰ ΔΖ, ΖΗ, ΗΕ»

[και ας διαιρεθεί το ΔΕ εις τα ίσα προς το Γ μεγέθη τα ΔΖ, ΖΗ, ΗΕ]

«καὶ ἀφῃρήσθω ἀπὸ μὲν τοῦ ΑΒ μεῖζον ἢ τὸ ἥμισυ τὸ ΒΘ»

[και ας αφαιρεθεί από μεν του ΑΒ μεγαλύτερον του ημίσεος το ΒΘ]

«ἀπὸ δὲ τοῦ ΑΘ μεῖζον ἢ τὸ ἥμισυ τὸ ΘΚ»

[από δε του ΑΘ μεγαλύτερον του ημίσεος το ΘΚ]

«καὶ τοῦτο ἀεὶ γιγνέσθω, ἕως ἂν αἱ ἐν τῷ ΑΒ διαιρέσεις ἰσοπληθεῖς γένωνται ταῖς ἐν τῷ ΔΕ διαιρέσεσιν»

[και τούτο ας γίνεται πάντοτε μέχρις ότου οι διαιρέσεις του ΑΒ γίνουν ισοπληθείς προς τις διαιρέσεις του ΔΕ]

«Ἔστωσαν οὖν αἱ ΑΚ, ΚΘ, ΘΒ διαιρέσεις ἰσοπληθεῖς οὖσαι ταῖς ΔΖ, ΖΗ, ΗΕ»

[Έστω, λοιπόν, οι διαιρέσεις ΑΚ, ΚΘ, ΘΒ ισοπληθείς προς τις διαιρέσεις ΔΖ, ΖΗ, ΗΕ] «καὶ ἐπεὶ μεῖζόν ἐστι τὸ ΔΕ τοῦ ΑΒ, καὶ ἀφῄρηται ἀπὸ μὲν τοῦ ΔΕ ἔλασσον τοῦ ἡμίσεος τὸ ΕΗ»

[και επειδή το ΔΕ μεγαλύτερο του ΑΒ και αφαιρέθηκε από μεν του ΔΕ λιγότερο του ημίσεος το ΕΗ]

«ἀπὸ δὲ τοῦ ΑΒ μεῖζον ἢ τὸ ἥμισυ τὸ ΒΘ»

[από δε του ΑΒ μεγαλύτερον του ημίσεος το ΒΘ]

«λοιπὸν ἄρα τὸ ΗΔ λοιποῦ τοῦ ΘΑ μεῖζόν ἐστιν»

[το υπόλοιπον άρα το ΗΔ θα είναι μεγαλύτερο του υπολοίπου ΘΑ]

«καὶ ἐπεὶ μεῖζόν ἐστι τὸ ΗΔ τοῦ ΘΑ, καὶ ἀφῄρηται τοῦ μὲν ΗΔ ἥμισυ τὸ ΗΖ»

[και επειδή το ΗΔ μεγαλύτερον του ΘΑ και αφαιρέθηκε από μεν του ΗΔ ήμισυ το ΗΖ]

«τοῦ δὲ ΘΑ μεῖζον ἢ τὸ ἥμισυ τὸ ΘΚ»

[από δε του ΘΑ μεγαλύτερον του ημίσεος το ΘΚ]

«λοιπὸν ἄρα τὸ ΔΖ λοιποῦ τοῦ ΑΚ μεῖζόν ἐστιν»

[άρα το υπόλοιπο ΔΖ είναι μεγαλύτερον του υπολοίπου ΑΚ]

«ἴσον δὲ τὸ ΔΖ τῷ Γ· καὶ τὸ Γ ἄρα τοῦ ΑΚ μεῖζόν ἐστιν»

[Είναι δε ΔΖ=Γ. Άρα και το Γ μεγαλύτερον του ΑΚ]

«ἔλασσον ἄρα τὸ ΑΚ τοῦ Γ»

[Άρα το ΑΚ είναι μικρότερον του Γ]

«Καταλείπεται ἄρα ἀπὸ τοῦ ΑΒ μεγέθους τὸ ΑΚ μέγεθος ἔλασσον ὂν τοῦ ἐκκειμένου ἐλάσσονος μεγέθους τοῦ Γ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι»

[Άρα απομένει από το μέγεθος ΑΒ το μέγεθος ΑΚ, το οποίον είναι μικρότερον του δοθέντος μικρότερου μεγέθους Γ. Όπερ έδει δείξαι.]

«ὁμοίως δὲ δειχθήσεται, κἂν ἡμίση ᾖ τὰ ἀφαιρούμενα»

[Με όμοιον τρόπο γίνεται η απόδειξη όταν τα αφαιρούμενα είναι ημίση.]

Πρόταση 2

«Ἐὰν δύο μεγεθῶν [ἐκκειμένων] ἀνίσων ἀνθυφαιρουμένου ἀεὶ τοῦ ἐλάσσονος ἀπὸ τοῦ μείζονος τὸ καταλειπόμενον μηδέποτε καταμετρῇ τὸ πρὸ ἑαυτοῦ, ἀσύμμετρα ἔσται τὰ μεγέθη»

[Εάν δοθούν δύο άνισα μεγέθη και ανθυφαιρείται πάντοτε το μικρότερον από το μεγαλύτερον, το εκάστοτε, δε, υπόλοιπον ουδέποτε καταμετρεί το προ εαυτού, τα μεγέθη θα είναι ασύμμετρα]

Απόδειξη

«Δύο γὰρ μεγεθῶν ὄντων ἀνίσων τῶν ΑΒ, ΓΔ καὶ ἐλάσσονος τοῦ ΑΒ ἀνθυφαιρουμένου ἀεὶ τοῦ ἐλάσσονος ἀπὸ τοῦ μείζονος»

[Διότι, έστω τα μεγέθη ΑΒ < ΓΔ και ότι ανθυφαιρείται πάντοτε το μικρότερο από το μεγαλύτερον]

«τὸ περιλειπόμενον μηδέποτε καταμετρείτω τὸ πρὸ ἑαυτοῦ»

[και το εκάστοτε υπόλοιπον ουδέποτε καταμετρεί το προ εαυτού]

«λέγω, ὅτι ἀσύμμετρά ἐστι τὰ ΑΒ, ΓΔ μεγέθη»

[Λέω ότι τα μεγέθη ΑΒ και ΓΔ είναι ασύμμετρα]

«Εἰ γάρ ἐστι σύμμετρα, μετρήσει τι αὐτὰ μέγεθος. μετρείτω, εἰ δυνατόν, καὶ ἔστω τὸ Ε»

[Διότι, αν είναι σύμμετρα, θα τα μετρά κάποιο μέγεθος, έστω το Ε.]

«καὶ τὸ μὲν ΑΒ τὸ ΖΔ καταμετροῦν λειπέτω ἑαυτοῦ ἔλασσον τὸ ΓΖ, τὸ δὲ ΓΖ τὸ ΒΗ καταμετροῦν λειπέτω ἑαυτοῦ ἔλασσον τὸ ΑΗ»

[Και το μεν ΑΒ αφού καταμετρήσει το ΖΔ ας αφήσει υπόλοιπον το ΓΖ < ΑΒ, το δε ΓΖ αφού καταμετρήσει το ΒΗ ας αφήσει υπόλοιπον το ΑΗ < ΓΖ]

«καὶ τοῦτο ἀεὶ γινέσθω, ἕως οὗ λειφθῇ τι μέγεθος, ὅ ἐστιν ἔλασσον τοῦ Ε»

[κι ας γίνεται τούτο πάντοτε, μέχρις ότου να υπολείπεται κάποιο μέγεθος, το οποίο να είναι μικρότερο του Ε

«γεγονέτω, καὶ λελείφθω τὸ ΑΗ ἔλασσον τοῦ Ε»

[Ας γίνει και έστω το υπόλοιπον ΑΗ < Ε]

«ἐπεὶ οὖν τὸ Ε τὸ ΑΒ μετρεῖ, ἀλλὰ τὸ ΑΒ τὸ ΔΖ μετρεῖ, καὶ τὸ Ε ἄρα τὸ ΖΔ μετρήσει»

[Επειδή λοιπόν το Ε μετρεί το ΑΒ, αλλά το ΑΒ μετρεί το ΔΖ, και το Ε θα μετρήσει το ΖΔ]

«μετρεῖ δὲ καὶ ὅλον τὸ ΓΔ· καὶ λοιπὸν ἄρα τὸ ΓΖ μετρήσει»

[Μετρεί, δε, και όλον το ΓΔ. Άρα θα μετρήσει και το υπόλοιπον το ΓΖ]

«ἀλλὰ τὸ ΓΖ τὸ ΒΗ μετρεῖ· καὶ τὸ Ε ἄρα τὸ ΒΗ μετρεῖ. μετρεῖ δὲ καὶ ὅλον τὸ ΑΒ»

[Αλλά το ΓΖ μετρεί το ΒΗ. Και το Ε άρα μετρεί το ΒΗ. Μετρεί, δε, και όλον το ΑΒ]

«καὶ λοιπὸν ἄρα τὸ ΑΗ μετρήσει, τὸ μεῖζον τὸ ἔλασσον. ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον»

[Άρα θα μετρήσει και το υπόλοιπον το ΑΗ, το μεγαλύτερον το μικρότερον, το οποίο είναι αδύνατον]

«οὐκ ἄρα τὰ ΑΒ, ΓΔ μεγέθη μετρήσει τι μέγεθος· ἀσύμμετρα ἄρα ἐστὶ τὰ ΑΒ, ΓΔ μεγέθη»

[Δεν θα μετρήσει, άρα, τα μεγέθη ΑΒ, ΓΔ κάποιο μέγεθος. Άρα τα μεγέθη ΑΒ, ΓΔ είναι ασύμμετρα]

<u>Πρόταση 3</u>

«Ἐὰν ἄρα δύο μεγεθῶν ἀνίσων, καὶ τὰ ἑξῆς. Δύο μεγεθῶν συμμέτρων δοθέντων τὸ μέγιστον αὐτῶν κοινὸν μέτρον εὑρεῖν».

[Δοθέντων δύο σύμμετρων μεγεθών να ευρεθεί το μέγιστον αυτών κοινόν μέτρον]

<u>Απόδειξη</u>

«Ἔστω τὰ δοθέντα δύο μεγέθη σύμμετρα τὰ ΑΒ, ΓΔ, ὧν ἔλασσον τὸ ΑΒ»

[Έστω τα δοθέντα δύο σύμμετρα μεγέθη τα ΑΒ, ΓΔ και ΑΒ < ΓΔ]

«δεῖ δὴ τῶν ΑΒ, ΓΔ τὸ μέγιστον κοινὸν μέτρον εὑρεῖν»

[Πρέπει να ευρεθεί το μέγιστον κοινόν μέτρον των ΑΒ, ΓΔ]

«Τὸ ΑΒ γὰρ μέγεθος ἤτοι μετρεῖ τὸ ΓΔ ἢ οὔ»

[Διότι, το μέγεθος ΑΒ ή μετρεί το ΓΔ ή όχι]

«εἰ μὲν οὖν μετρεῖ, μετρεῖ δὲ καὶ ἑαυτό, τὸ ΑΒ ἄρα τῶν ΑΒ, ΓΔ κοινὸν μέτρον ἐστίν»

[Εάν, μεν, λοιπόν το μετρεί, μετρεί δε και τον εαυτόν του, άρα το ΑΒ είναι κοινόν μέτρον των ΑΒ, ΓΔ]

«καὶ φανερόν, ὅτι καὶ μέγιστον. μεῖζον γὰρ τοῦ ΑΒ μεγέθους τὸ ΑΒ οὐ μετρήσει»

[Και είναι φανερόν ότι είναι και μέγιστον. Διότι το ΑΒ δεν μετρείται υπό μεγαλυτέρου του ΑΒ μεγέθους]

«Μὴ μετρείτω δὴ τὸ ΑΒ τὸ ΓΔ»

[Αλλά ας μη μετρεί το ΑΒ το ΓΔ]

«καὶ ἀνθυφαιρουμένου ἀεὶ τοῦ ἐλάσσονος ἀπὸ τοῦ μείζονος»

[Και εάν ανθυφαιρείται πάντοτε το μικρότερον από του μεγαλύτερου]

«τὸ περιλειπόμενον μετρήσει ποτὲ τὸ πρὸ ἑαυτοῦ»

[κάποιο υπόλοιπον θα μετρήσει κάποτε το προ εαυτού]

«διὰ τὸ μὴ εἶναι ἀσύμμετρα τὰ ΑΒ, ΓΔ»

[διότι τα μεγέθη ΑΒ, ΓΔ δεν είναι ασύμμετρα]

«καὶ τὸ μὲν ΑΒ τὸ ΕΔ καταμετροῦν λειπέτω ἑαυτοῦ ἔλασσον τὸ ΕΓ»

[Και το μεν ΑΒ αφού μετρήσει το ΕΔ ας αφήσει υπόλοιπον ΕΓ < ΑΒ]

«τὸ δὲ ΕΓ τὸ ΖΒ καταμετροῦν λειπέτω ἑαυτοῦ ἔλασσον τὸ ΑΖ»

[το δε ΕΓ αφού μετρήσει το ΖΒ ας αφήσει υπόλοιπον ΑΖ < ΕΓ]

«τὸ δὲ ΑΖ τὸ ΓΕ μετρείτω»

[το δε ΑΖ ας μετρεί το ΓΕ]

«Επεὶ οὖν τὸ ΑΖ τὸ ΓΕ μετρεῖ, ἀλλὰ τὸ ΓΕ τὸ ΖΒ μετρεῖ, καὶ τὸ ΑΖ ἄρα τὸ ΖΒ μετρήσει»

[Επειδή, λοιπόν, το ΑΖ μετρεί το ΓΕ, αλλά το ΓΕ μετρεί το ΖΒ, άρα και το ΑΖ μετρεί το ΖΒ]

«μετρεῖ δὲ καὶ ἑαυτό· καὶ ὅλον ἄρα τὸ ΑΒ μετρήσει τὸ ΑΖ»

[Μετρεί δε και τον εαυτόν του. Άρα το ΑΖ θα μετρήσει και όλον το ΑΒ]

«ἀλλὰ τὸ ΑΒ τὸ ΔΕ μετρεῖ· καὶ τὸ ΑΖ ἄρα τὸ ΕΔ μετρήσει»

[Αλλά το ΑΒ μετρεί το ΔΕ. Άρα και το ΑΖ μετρεί το ΕΔ] «μετρεῖ δὲ καὶ τὸ ΓΕ· καὶ ὅλον ἄρα τὸ ΓΔ μετρεῖ»

[Μετρεί, δε, και το ΓΕ. Άρα μετρεί και όλον το ΓΔ]

«τὸ ΑΖ ἄρα τῶν ΑΒ, ΓΔ κοινὸν μέτρον ἐστίν. λέγω δή, ὅτι καὶ μέγιστον»

[Το ΑΖ άρα είναι κοινόν μέτρον των ΑΒ, ΓΔ. Λέγω, τώρα, ότι είναι και μέγιστον]

«εἰ γὰρ μή, ἔσται τι μέγεθος μεῖζον τοῦ ΑΖ, ὃ μετρήσει τὰ ΑΒ, ΓΔ. ἔστω τὸ Η»

[Διότι, εάν δεν είναι, θα υπάρχει κάποιο μέγεθος μεγαλύτερον του ΑΖ, το οποίο θα μετρεί τα ΑΒ, ΓΔ. Έστω το Η]

«ἐπεὶ οὖν τὸ Η τὸ ΑΒ μετρεῖ, ἀλλὰ τὸ ΑΒ τὸ ΕΔ μετρεῖ, καὶ τὸ Η ἄρα τὸ ΕΔ μετρήσει»

[Επειδή λοιπόν το Η μετρεί το ΑΒ, αλλά το ΑΒ μετρεί το ΕΔ, και το Η άρα μετρεί το ΕΔ]

«μετρεῖ δὲ καὶ ὅλον τὸ ΓΔ· καὶ λοιπὸν ἄρα τὸ ΓΕ μετρήσει τὸ Η»

[Μετρεί δε και όλον το ΓΔ. Άρα το Η θα μετρεί και τη διαφορά ΓΕ]

«ἀλλὰ τὸ ΓΕ τὸ ΖΒ μετρεῖ· καὶ τὸ Η ἄρα τὸ ΖΒ μετρήσει»

[Αλλά το ΓΕ μετρεί το ΖΒ. Άρα και το Η μετρεί το ΖΒ]

«μετρεῖ δὲ καὶ ὅλον τὸ ΑΒ, καὶ λοιπὸν τὸ ΑΖ μετρήσει, τὸ μεῖζον τὸ ἔλασσον ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον»

[Μετρεί, δε, και όλον το ΑΒ και θα μετρήσει και τη διαφορά ΑΖ, το μεγαλύτερον θα μετρήσει το μικρότερον, το οποίο είναι αδύνατον]

«οὐκ ἄρα μεῖζόν τι μέγεθος τοῦ ΑΖ τὰ ΑΒ, ΓΔ μετρήσει»

[Δεν θα μετρήσει άρα κάποιο μέγεθος μεγαλύτερον του ΑΖ τα ΑΒ, ΓΔ]

«τὸ ΑΖ ἄρα τῶν ΑΒ, ΓΔ τὸ μέγιστον κοινὸν μέτρον ἐστίν»

[Το ΑΖ άρα είναι το μέγιστον κοινόν μέτρον των ΑΒ, ΓΔ]

«Δύο ἄρα μεγεθῶν συμμέτρων δοθέντων τῶν ΑΒ, ΓΔ τὸ μέγιστον κοινὸν μέτρον ηὕρηται· ὅπερ ἔδει δεῖξαι»

[Δοθέντων άρα δύο συμμέτρων μεγεθών των ΑΒ, ΓΔ ευρέθη το μέγιστον κοινόν μέτρον. Όπερ έδει δείξαι]

Στις διηγήσεις του Ιάμβλιχου και του Νικόμαχου βλέπουμε ότι ο Πυθαγόρας «ἐν φροντίδι ποτὲ καὶ διαλογισμῷ συντεταμένῳ ὑπάρχων, εἰ ἄρα δύναιτο τῇ ἀκοῇ βοήθειάν τινα ὀργανικὴν ἐπινοῆσαι παγίαν καὶ ἀπαραλόγιστον, οἵαν ἡ μὲν ὄψις διὰ τοῦ διαβήτου καὶ διὰ τοῦ κανόνος ἢ καὶ διὰ τῆς διόπτρας ἔχει, ἡ δ' ἁφὴ διὰ τοῦ ζυγοῦ ἢ διὰ τῆς τῶν μέτρων ἐπινοίας»

[μια μέρα βυθίστηκε στις σκέψεις για να δει αν θα μπορούσε να επινοήσει κάποιο οργανικό βοήθημα για την ακοή, το οποίο θα ήταν συνεπές και όχι επιρρεπές σε λάθη, με τον ίδιο τρόπο που και η όραση βοηθάται από τους διαβήτες, τον κανόνα και τη διόπτρα, η αφή από την ισορροπία και από τη διαίρεση των μέτρων]

Έτσι, οι Πυθαγόρειοι ήταν σε αναζήτηση ενός ακουστικού βοηθήματος, συγκρίσιμου με την πυξίδα και το χάρακα για την όραση και με τα βάρη και τα μέτρα για την αφή. Η διήγηση του Ιάμβλιχου παραπέμπει στην εύρεση ενός μουσικού διαστήματος, με τη βοήθεια του οποίου θα εκφράζονταν τα σύμφωνα διαστήματα. Αυτή, μάλιστα, η αναζήτηση δεν έγινε τόσο από τον ίδιο τον Πυθαγόρα αλλά μάλλον από την επόμενη του Πυθαγόρα γενιά και πιθανώς από τον Ίππασο, μαθητή του Πυθαγόρα, ο οποίος συμμετείχε σε ακουστικά πειράματα.

Ποιος όμως θα ήταν ο πιο φυσικός τρόπος να αναζητήσει κανείς ένα μουσικό μέτρο; Μέχρι τώρα έχουμε προσδιορίσει τρεις λόγους που αντιστοιχούν σε σύμφωνα μουσικά διαστήματα, το 2/1, το 3/2 και το 4/3 και μάλιστα το 2/1 συντίθεται από το 3/2 και το 4/3. Έχοντας κατά νου ότι η σύνθεση σημαίνει πολλαπλασιασμό και όχι πρόσθεση, οδηγούμαστε στη σχέση:

$$3/2 = 4/3 \cdot 9/8$$

Έτσι, η πέμπτη είναι η σύνθεση της τετάρτης και ενός καινούριου ακόμη μικρότερου διαστήματος, του 9/8, που καλείται «τόνος». Για να δούμε, τώρα, αν ο τόνος είναι το μουσικό μέτρο που αναζητάμε, δεν μένει παρά να συγκρίνουμε την τετάρτη με τον τόνο:

$$4/3 = 9/8 \cdot 32/27$$

και από τη στιγμή που το διάστημα 32/27 είναι μεγαλύτερο από το 9/8, προχωρούμε παραπέρα:

$$4/3 = (9/8)^2 \cdot 256/243$$

Βρισκόμαστε, επομένως, αντιμέτωποι με ένα ακόμη πιο μικρό διάστημα, το 256/243, που καλείται λείμμα.

Η Επτάχορδη Λύρα και η Πυθαγόρεια Κοσμολογία

Ο Τέρπανδρος εισήγαγε τη βαρύτονη επτάχορδη λύρα, η δομή της οποίας είναι η παρακάτω:

Συζευγμένο τετράχορδο			Τετράχορδο του μέσου		
Τόνος	Τόνος	Δίεση	Τόνος	Τόνος	Δίεση

Νήτη συνειμ-μένων	παρανήτη συνειμ-μένων	παραμέση	μέση	λιχανός	παρυπάτη	υπάτη

Η υψηλότερη σε τόνο νότα (φθόγγος) είναι η νήτη και η χαμηλότερη είναι η υπάτη. Το διάστημα ανάμεσα στη νήτη και τη μέση είναι μια τετάρτη, καθώς επίσης και από τη μέση στην υπάτη. Έτσι, το εύρος μιας επτάχορδης λύρας δεν είναι μια πλήρης οκτάβα, αλλά ένα διάστημα μήκους $\left(\frac{4}{3}\right)^2 = \frac{16}{9}$ και η λύρα είναι βαρύτονη, διότι αυτό το διάστημα αντιπροσωπεύει το χαμηλότερο μέρος της οκτάβας.

<u>Η Οκτάχορδη Λύρα και η Μουσική Κλίμακα</u>

Παρατηρώντας κανείς τις λύρες που απεικονίζονται στους αρχαίους αμφορείς, οι αρχαιότερες από αυτές είναι επτάχορδες. Από ένα σημείο και μετά (κατά το τέλος του 5ου αιώνα π.Χ.), έκαναν την εμφάνισή τους η οκτάχορδη λύρα και η κιθάρα. Οι λόγοι για τους οποίους προέκυψε η οκτάχορδη λύρα είναι καθαρά μουσικοί. Όπως είπαμε και προηγουμένως, η επτάχορδη λύρα δεν κάλυπτε όλο το εύρος μιας οκτάβας (2/1), αλλά ένα μέρος αυτού (16/9), με αποτέλεσμα να λείπει ένας τόνος (9/8). Παρεμβάλλοντας, λοιπόν, το διάστημα ενός τόνου μεταξύ των δύο τετραχόρδων, παράχθηκε το σύστημα των διαζευγμένων τετραχόρδων:

Τόνος	Τόνος	Δίεση	**ΤΟΝΟΣ**	Τόνος	Τόνος	Δίεση

Νήτη	παρανήτη	τρίτη	παραμέση	μέση	λιχανός	παρυπάτη	υπάτη

Με αυτή την προσθήκη, οι Πυθαγόρειοι πέτυχαν την κατασκευή μιας κλίμακας ίδιας με τη σύγχρονη. Λαμβάνοντας, τώρα, υπόψη το γεγονός ότι οι σύγχρονες κλίμακες πηγαίνουν από τις χαμηλές νότες στις υψηλές (δηλαδή αντίθετα από τις αρχαίες κλίμακες), παίρνουμε την εξής αντιστοιχία:

Νήτη ⟷ mi
τόνος
Παρανήτη ⟷ re
τόνος
Τρίτη ⟷ do
δίεση ⟷ ημιτόνιο
Παραμέση ⟷ si
τόνος
Μέση ⟷ la
τόνος
Λιχανός ⟷ sol
τόνος
Παρυπάτη ⟷ fa
δίεση ⟷ ημιτόνιο
Υπάτη ⟷ mi

Το γεγονός ότι η μουσική πυθαγόρεια κλίμακα καλά κρατεί, ακόμα και στις μέρες μας, είναι απόδειξη για το ότι, από μουσικοακουστικής άποψης, η αναζήτηση ενός μέτρου κατέληξε επιτυχώς. Μάλιστα, το μουσικό διάστημα με λόγο

$$\mathrm{d} = \frac{256}{243} \approx 1.05349$$

καλούταν «δίεση», ενώ το τέλειο ημιτόνιο ήταν το μουσικό διάστημα με λόγο

$$\mathrm{t}^{\frac{1}{2}} = \sqrt{9/8} \approx 1.06066$$

Θα μπορούσαμε να πούμε ότι η δίεση και το ημιτόνιο είναι περίπου ίσα, μια και η διαφορά τους είναι $\frac{\mathrm{t}^{\frac{1}{2}}}{\mathrm{d}} \approx 1.0068 < \mathrm{t}^{\frac{1}{16}} \approx 1.0074$, δηλαδή μικρότερη ακόμα κι από το διάστημα που μπορεί να διακρίνει το ανθρώπινο αυτί!

Η Μουσική Κλίμακα του Φιλολάου

Ας μιλήσουμε τώρα για τον Φιλόλαο, έναν Πυθαγόρειο φιλόσοφο και θεωρητικό της μουσικής. Για τον Φιλόλαο υπάρχουν αναφορές από τον Νικόμαχο στο *Εγχειρίδιον* και από τον Βοήθειο στο *De Institutione Musica*. Ο Φιλόλαος, αμέσως μετά τη συζήτηση για τη δημιουργία της τάξης του σύμπαντος μέσα από την αρμονία αντιθέτων, περνά κατευθείαν στη μουσική και ορίζει ως αρμονία το σύστημα των τριών σύμφωνων διαστημάτων, δηλαδή της τετάρτης, της πέμπτης και της οκτάβας, στα οποία οι Πυθαγόρειοι αντιστοίχισαν τους παρακάτω λόγους:

$\frac{2}{1} \rightarrow$ Αρμονία ή Διαπασών «τὸ διὰ πασᾶν δὲ διπλόον»

$\frac{3}{2} \rightarrow$ Δι’ οξείαν ή Διαπέντε ή Ημιόλιον «τὸ δὲ δι᾽ ὀξειᾶν ἡμιόλιον»

$\frac{4}{3} \rightarrow$ Συλλαβά ή Διατεσσάρων ή Επίτριτον «τὸ δὲ συλλαβὰ ἐπίτριτον»

«ἔστι γὰρ ἀπὸ ὑπάτας ἐπὶ μέσσαν συλλαβά, ἀπὸ δὲ μέσσας ἐπὶ νεάταν δι᾽ ὀξειᾶν, ἀπὸ δὲ νεάτας ἐς τρίταν συλλαβά, ἀπὸ δὲ τρίτας ἐς ὑπάταν δι᾽ ὀξειᾶν»

[από την «υπάτη» στη «μέση» είναι μια «συλλαβά», από τη «μέση» στη «νήτη» είναι μια «δι’ οξείαν», από τη «νήτη» στην «τρίτη» είναι μια «συλλαβά», από την «τρίτη» στην «υπάτη» είναι μια «δι’ οξείαν»]

$\frac{9}{8} \rightarrow$ Τόνος ή Επόγδοον «τὸ δ᾽ ἐν μέσωι μέσσας καὶ τρίτας ἐπόγδοον»

[το διάστημα ανάμεσα στην «τρίτη» και τη «μέση» είναι επόγδοο]

Ο Φιλόλαος, στο έργο του *«Περί Φύσεως»*, αναφέρεται σε χορδές με μήκη 6, 8, 9, 12 μονάδων και ορίζει τα εξής δίχορδα:

<u>Διαπασών:</u> (6,12) ή (1,2)

<u>Δι’ οξείαν:</u> (6,9) ή (8,12) ή (2,3)

<u>Συλλαβά:</u> (6,8) ή (9,12) ή (3,4)

<u>Επόγδοον:</u> (8,9)

Αναφέρει, δε, ότι:

- «῾ἁρμονίας δὲ μέγεθός ἐστι συλλαβὰ καὶ δι᾽ ὀξειᾶν»

  [Το μέγεθος της αρμονίας είναι η συλλαβά και η δι’ οξείαν]

  Αρμονία = 1 Δι’ οξείαν + Συλλαβά Δηλαδή: $\frac{2}{1} = \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3}, \quad \frac{2}{1} > \frac{3}{2}$

- «τὸ δὲ δι᾽ ὀξειᾶν μεῖζον τᾶς συλλαβᾶς ἐπογδόωι»
  [η «δι’ οξείαν» είναι μεγαλύτερη από τη «συλλαβά» σε επόγδοο λόγο]
  Δι’ οξείαν = 1 Συλλαβά + Τόνος Δηλαδή: $\frac{3}{2} = \frac{4}{3} \cdot \frac{9}{8}, \quad \frac{3}{2} > \frac{4}{3}$

- «συλλαβὰ δὲ δύ᾽ ἐπόγδοα καὶ δίεσις»

[η συλλαβά» είναι δύο επόγδοα και μια δίεση]

Συλλαβά = 2 Τόνοι + Δίεση Δηλαδή: $\frac{4}{3}=\left(\frac{9}{8}\right)^2\cdot\frac{2^8}{3^5},\quad \frac{4}{3}>\frac{9}{8}$

Ο Φιλόλαος συνέχισε τη διαίρεση του τόνου με τη δίεση:

$$\frac{9}{8}=\frac{256}{243}\cdot\frac{2187}{2048},\quad \frac{9}{8}>\frac{256}{243}$$

όπου 2187/2048 = $3^7/2^{11}$ είναι ένα μουσικό διάστημα που ονομάζεται από τον ίδιο «αποτομή τόνου». Επειδή, όπως ο ίδιος παρατήρησε, η αποτομή τόνου είναι μεγαλύτερη της δίεσης, προχώρησε παρακάτω κι έτσι προέκυψε

$$\frac{9}{8}=\left(\frac{256}{243}\right)^2\cdot\frac{531441}{524288}$$

όπου 531441/524288 = $3^{12}/2^{19}$ είναι ένα μουσικό διάστημα που ονομάστηκε «πυθαγόρειο κόμμα». Πρόκειται για ένα πολύ μικρό μουσικό διάστημα, μικρότερο κι από τη δίεση και, μάλιστα, λίγο μεγαλύτερο από 1/4 της δίεσης και λίγο μικρότερο από το 1/8 του τόνου. Οπότε:

- Τόνος = 2 Διέσεις + Πυθαγόρειο Κόμμα Δηλαδή: $\frac{9}{8}=\left(\frac{2^8}{3^5}\right)^2\cdot\frac{3^{12}}{2^{19}},\quad \frac{9}{8}>\frac{2^8}{3^5}$

Ο Φιλόλαος προχωρά λέγοντας:

- «οὕτως ἁρμονία πέντε ἐπόγδοα καὶ δύο διέσεις»

  [Έτσι, η αρμονία αποτελείται από πέντε επόγδοα και δύο διέσεις]

  Αρμονία = πέντε επόγδοα + δύο διέσεις $\frac{2}{1}=\left(\frac{9}{8}\right)^5\cdot\left(\frac{2^8}{3^5}\right)^2$

- «δι᾽ ὀξειᾶν δὲ τρία ἐπόγδοα καὶ δίεσις»

  [Η δι' οξείαν είναι τρία επόγδοα και μια δίεση]

  Δι' οξείαν = τρία επόγδοα + μία δίεση $\frac{3}{2}=\left(\frac{9}{8}\right)^3\cdot\frac{2^8}{3^5}$

- «συλλαβὰ δὲ δύ᾽ ἐπόγδοα καὶ δίεσις»

[η συλλαβά είναι δύο επόγδοα και μια δίεση]

Συλλαβά = δύο επόγδοα + μία δίεση $\qquad \frac{4}{3} = \left(\frac{9}{8}\right)^2 \cdot \frac{2^8}{3^5}$

και, τέλος,

- Τόνος = δύο διέσεις + Πυθαγόρειο Κόμμα $\qquad \frac{9}{8} = \left(\frac{2^8}{3^5}\right)^2 \cdot \frac{3^{12}}{2^{19}}$

Έτσι, οι Πυθαγόρειοι χώρισαν με τον παρακάτω τρόπο την οκτάβα:

Αρμονία (Διαπασών των χορδών)

Δι’ οξείαν (Διαπέντε) | Συλλαβά (Διατεσσάρων)

Συλλαβά (Διατεσσάρων) | Τόνος (Επόγδοον) | Συλλαβά (Διατεσσάρων)

Τόνος | Τόνος | Δ | Τόνος | Τόνος | Τόνος | Δ

<u>Η Περιγραφή της Μουσικής Κλίμακας από τον Ε. Σταμάτη</u>

Αξιόλογη προσπάθεια περιγραφής της μουσικής κλίμακας έχει γίνει και από τον Ευάγγελο Σταμάτη. Αρχικά, ο ίδιος αναφέρεται στα σχόλια των Αρμονικών του Πτολεμαίου, όπου ο Πορφύριος σημειώνει τα εξής:

«Ἀρχύτας δὲ περὶ τῶν μεσοτήτων λέγων γράφει ταῦτα»
[Ο Αρχύτας γράφει τα παρακάτω για τις μεσότητες]

«μέσαι δέ ἐντι τρῖς τᾶι μουσικᾶι, μία μὲν ἀριθμητικά, δευτέρα δὲ ἁ γεωμετρικά, τρίτα δ' ὑπεναντία, ἃν καλέοντι ἁρμονικάν»

[υπάρχουν τρεις μέσοι στη μουσική: ο πρώτος είναι ο αριθμητικός, ο δεύτερος ο γεωμετρικός και ο τρίτος ο αρμονικός]

«ἀριθμητικὰ μέν, ὅκκα ἔωντι τρεῖς ὅροι κατὰ τὰν τοίαν ὑπεροχὰν ἀνὰ λόγον· ὧι πρᾶτος δευτέρου ὑπερέχει, τούτωι δεύτερος τρίτου ὑπερέχει. καὶ ἐν ταύται <τᾶι> ἀναλογίαι συμπίπτει ἦιμεν τὸ τῶν μειζόνων ὅρων διάστημα μεῖον, τὸ δὲ τῶν μειόνων μεῖζον»

[Αριθμητικό μέσο έχουμε όταν υπάρχουν τρεις όροι οι οποίοι διαφέρουν κατά την ίδια ποσότητα: ο δεύτερος υπερέχει του τρίτου κατά την ίδια ποσότητα που και ο πρώτος υπερέχει του δεύτερου. Σ' αυτή την αναλογία, ο λόγος με τους μεγαλύτερους όρους είναι μικρότερος από αυτόν με τους μικρότερους όρους.]

«ἁ γεωμετρικὰ δέ, ὅκκα ἔωντι οἷος ὁ πρᾶτος ποτὶ τὸν δεύτερον, καὶ ὁ δεύτερος ποτὶ τὸν τρίτον. τούτων δ' οἱ μείζονες ἴσον ποιοῦνται τὸ διάστημα καὶ οἱ μείους»

[Γεωμετρικό μέσο έχουμε όταν ο δεύτερος όρος είναι για τον τρίτο, ό,τι και ο πρώτος για τον δεύτερο. Σ' αυτή την αναλογία, ο λόγος με τους μεγαλύτερους όρους ισούται με το λόγο με τους μικρότερους όρους]

«ἁ δ' ὑπεναντία, ἃν καλοῦμεν ἁρμονικάν, ὅκκα ἔωντι <τοῖοι· ὧι> ὁ πρᾶτος ὅρος ὑπερέχει τοῦ δευτέρου αὐταύτου μέρει, τούτωι ὁ μέσος τοῦ τρίτου ὑπερέχει τοῦ τρίτου μέρει. γίνεται δ' ἐν ταύται τᾶι ἀναλογίαι τὸ τῶν μειζόνων ὅρων διάστημα μεῖζον, τὸ δὲ τῶν μειόνων μεῖον»

[Ο αρμονικός μέσος λειτουργεί ως εξής: ο πρώτος όρος υπερέχει του δεύτερου κατά ένα μέρος του πρώτου και κατά το ίδιο μέρος του τρίτου υπερέχει κι ο δεύτερος όρος από τον τρίτο. Σ' αυτή την αναλογία, ο λόγος με τους μεγαλύτερους όρους είναι μεγαλύτερος από αυτόν με τους μικρότερους όρους]

Ο Ευάγγελος Σταμάτης, στη *Συμβολή εις την Ερμηνείαν Μουσικού Χωρίου του Διαλόγου του Πλάτωνος Τίμαιος*, εξηγεί τα παραπάνω:

Έστω τρεις αριθμοί α, β, γ με $\alpha > \beta > \gamma > 0$. Τότε, κατά τον Αρχύτα, θα είναι:

Αριθμητική αναλογία, όταν $\alpha - \beta = \beta - \gamma$ (I)

και $\frac{\alpha}{\beta} < \frac{\beta}{\gamma}$ (II)

Γεωμετρική αναλογία, όταν $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\beta}{\gamma}$ (III)

Αρμονική αναλογία, όταν $\alpha = \beta + \frac{\alpha}{n}$, $\beta = \gamma + \frac{\gamma}{n}$ $(n \neq 1 > 0)$

με $\frac{\alpha}{\beta} > \frac{\beta}{\gamma}$ (IV)

Από την άλλη μεριά, ο Νικόμαχος στο *Introductio Arithmetica* ορίζει τον αρμονικό μέσο ως εξής:

«ὑπεναντία ἡ ἁρμονικὴ μεσότης τῇ ἀριθμητικῇ, μεταίχμιον δὲ αὐτῶν ὥσπερ ἀκροτήτων ἐστὶν ἡ γεωμετρικὴ ἔχουσα τοὺς ἐν τοῖς μείζοσιν ὅροις λόγους καὶ τοὺς ἐν τοῖς ἐλάττοσιν ἀλλήλοις ἴσους· ἐν μεσότητι δὲ ἡμῖν ὤφθη τὸ ἶσον τοῦ μείζονος καὶ τοῦ ἐλάττονος»,

δηλαδή $\beta = \frac{2\alpha\gamma}{\alpha+\gamma}$. (V)

Σύμφωνα με τον Σταμάτη, οι αποδείξεις των σχέσεων (II) και (IV) δεν έχουν σωθεί. Ωστόσο, εκείνος τις παρέχει στον αναγνώστη του:

Στη σχέση (I), αν διαιρέσουμε το πρώτο μέλος της ισότητας με β και το δεύτερο με γ, επειδή $\beta > \gamma$ θα πάρουμε:

$$\frac{\alpha - \beta}{\beta} < \frac{\beta - \gamma}{\gamma}$$

ή $$\frac{\alpha}{\beta} - 1 < \frac{\beta}{\gamma} - 1$$

κι έτσι αποδείχθηκε η αλήθεια της σχέσης (II).

Η σχέση (V) γράφεται: $\frac{1}{\gamma} - \frac{1}{\beta} = \frac{1}{\beta} - \frac{1}{\alpha}$ (VI)

Εάν πολλαπλασιάσουμε το πρώτο μέλος της ισότητας (VI) με β και το δεύτερο με α, επειδή $\beta < \alpha$ θα πάρουμε:

$$\beta\left(\frac{1}{\gamma} - \frac{1}{\beta}\right) < \alpha\left(\frac{1}{\beta} - \frac{1}{\alpha}\right)$$

ή $$\frac{\beta}{\gamma} - 1 < \frac{\alpha}{\beta} - 1$$

απ’ όπου έπεται η αλήθεια της $\frac{\alpha}{\beta} > \frac{\beta}{\gamma}$

Έχοντας μιλήσει για τους μέσους, ο Σταμάτης προχωρά στην περιγραφή της μουσικής κλίμακας:

Ο Φιλόλαος ξεκινά από τη μουσική αναλογία $6{:}\,8 = 9{:}\,12$, την οποία παριστάνουμε για λόγους ευκολίας ως $1{:}\frac{4}{3} = \frac{3}{2}{:}\,2$

Πρώτος φθόγγος της μουσικής κλίμακας είναι ο πρώτος όρος της προηγούμενης μουσικής αναλογίας, ο $1 =$ υπάτη $=$ κάτω do.

Ο δεύτερος φθόγγος λαμβάνεται με πολλαπλασιασμό του προηγούμενου φθόγγου, του 1, με το $\frac{9}{8}$, οπότε είναι:

$$1 \cdot \frac{9}{8} = \frac{9}{8} = \text{παρυπάτη} = \text{re}$$

Ο τρίτος φθόγγος λαμβάνεται επίσης με πολλαπλασιασμό του προηγούμενου φθόγγου, του $\frac{9}{8}$, με το $\frac{9}{8}$, οπότε είναι:

$$\frac{9}{8} \cdot \frac{9}{8} = \frac{81}{64} = \text{λιχανός} = \text{mi}$$

Ο τέταρτος φθόγγος είναι ο δεύτερος όρος της μουσικής αναλογίας $1{:}\frac{4}{3} = \frac{3}{2}{:}\,2$, δηλαδή ο $\frac{4}{3}$, ο οποίος είναι ο αρμονικός μέσος των άκρων όρων της μουσικής κλίμακας (του 1 και του 2), οπότε είναι:

$$\text{αρμονικός μέσος} = \frac{2 \cdot 1 \cdot 2}{1+2} = \frac{4}{3} = \text{μέση} = \text{fa}$$

Ο πέμπτος φθόγγος είναι ο τρίτος όρος της μουσικής αναλογίας $1{:}\frac{4}{3} = \frac{3}{2}{:}\,2$, δηλαδή ο $\frac{3}{2}$, ο οποίος είναι ο αριθμητικός μέσος των άκρων όρων της μουσικής κλίμακας (του 1 και του 2), οπότε είναι:

$$\text{αριθμητικός μέσος} = \frac{1+2}{2} = \frac{3}{2} = \text{παραμέση} = \text{sol}$$

Ο έκτος φθόγγος λαμβάνεται με πολλαπλασιασμό του προηγούμενου φθόγγου, του $\frac{3}{2}$, με το $\frac{9}{8}$, οπότε είναι:

$$\frac{3}{2} \cdot \frac{9}{8} = \frac{27}{16} = \text{τρίτη} = \text{la}$$

Ο έβδομος φθόγγος λαμβάνεται με πολλαπλασιασμό του προηγούμενου φθόγγου, του $\frac{27}{16}$ με το $\frac{9}{8}$, οπότε είναι:

$$\frac{27}{16} \cdot \frac{9}{8} = \frac{243}{128} = \text{παρανήτη} = \text{si}$$

Ο όγδοος φθόγγος είναι ο μεγαλύτερος από τους άκρους όρους της μουσικής αναλογίας $1 : \frac{4}{3} = \frac{3}{2} : 2$, ο 2 = νήτη = άνω do κι έχει συχνότητα διπλάσια από αυτή του πρώτου φθόγγου.

Η πυθαγόρεια μουσική κλίμακα, κατά τον Φιλόλαο, έχει ως εξής:

Do	re	mi	fa	sol	la	si	do
1	$\frac{9}{8}$	$\frac{81}{64}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{27}{16}$	$\frac{243}{128}$	2

Οι πλήρεις φθόγγοι – αυτοί με συχνότητα $\frac{9}{8}$ ο καθένας – είναι οι εξής πέντε:

$$\frac{9}{8}, \frac{81}{64}, \frac{3}{2}, \frac{27}{16}, \frac{243}{128}$$

Καθένας από τους παραπάνω φθόγγους είναι μεγαλύτερος από τον προηγούμενο κατά $\frac{9}{8}$. Μετά το φθόγγο $\frac{81}{64}$ ακολουθεί ο $\frac{4}{3}$, με τον δεύτερο να υπερέχει του πρώτου κατά $\frac{4}{3} : \frac{81}{64} = \frac{256}{243}$ (το διάστημα αυτό είναι μικρότερο του $\frac{9}{8}$ και καλείται δίεση). Ομοίως, μετά τον φθόγγο $\frac{243}{128}$ ακολουθεί ο 2, ο οποίος και πάλι υπερέχει του προηγούμενού του κατά $2 : \frac{243}{128} = \frac{256}{243}$ κι επομένως πρόκειται και πάλι για μια δίεση.

Ωστόσο, επιστρέφοντας στον Φιλόλαο, τα επιπλέον βήματα που προσέθεσε στη διαίρεση της κλίμακας καταδεικνύουν το γεγονός ότι η αναζήτηση ενός θεωρητικού μουσικού μέτρου είναι μια διαδικασία που οδηγεί στο άπειρο. Δεν μπορούμε να είμαστε σίγουροι αν ο ίδιος ο Φιλόλαος γνώριζε ότι η παραπάνω διαδικασία είναι ατέρμονη, όμως, σύμφωνα με τον καθηγητή Σ. Νεγρεπόντη, έχουμε κάποιες ενδείξεις γι' αυτό.

Κατ' αρχήν, ο Βοήθειος στο *De Institutione Musica* αναφέρει ότι ο Φιλόλαος όρισε παρακάτω δύο ακόμη μουσικά διαστήματα, το σχίσμα ως το μισό του κόμματος και το διάσχισμα ως το μισό της δίεσης. Βέβαια, αυτά τα διαστήματα περιλαμβάνουν τη ρίζα του 2 και του 3 αντίστοιχα, κάτι το οποίο θα δήλωνε άγνοια των βασικών προβλημάτων της ασυμμετρίας. Την ίδια στιγμή, η εγκατάλειψη της πυθαγόρειας αναζήτησης ενός μουσικού διαστήματος - η οποία στο επόμενο βήμα θα περιλάμβανε τη σύγκριση της δίεσης με το κόμμα – φανερώνει τη συνειδητοποίηση από το Φιλόλαο ότι αυτή η διαδικασία είναι ατέρμονη.

Επίσης, ο διάλογος του Πλάτωνα *«Φαίδων»* που αφορά στην αθανασία της ψυχής, είναι γεμάτος με αναφορές στον Φιλόλαο. Ο διάλογος αυτός εκτυλίσσεται στη φυλακή, την τελευταία νύχτα πριν ο Σωκράτης δηλητηριαστεί την αυγή, κυρίως μεταξύ αυτού και δύο μαθητών του Φιλολάου, του Σιμία και του Κέβη από τη Θήβα. Το όνομα του Φιλολάου αναφέρεται μόνο στην αρχή, ενώ στη συνέχεια ο Πλάτων (μέσα από τα λεγόμενα του Σωκράτη) παραθέτει το βασικό επιχείρημα περί αθανασίας της ψυχής, το οποίο καταλήγει στην ασυμφωνία των άρτιων με τους περιττούς αριθμούς, του 2 με το 3 (*Φαίδων, 103E-106C*). Αυτή ακριβώς η ασυμφωνία του 2 και του 3 είναι που καθιστά την αναζήτηση ενός μουσικού μέτρου αβάσιμη. Παρατηρούμε ότι, σε κάθε βήμα της διαδικασίας και ξεκινώντας από τα δύο βασικά μουσικά διαστήματα 2/1 και 3/2, πάντα θα προκύπτει ένα μικρότερο μουσικό διάστημα, τη μια φορά της μορφής άρτιος / περιττός $= 2^{\mathrm{m}}/3^{\mathrm{n}}$ και την άλλη περιττός / άρτιος $= 3^{\mathrm{n}}/2^{\mathrm{m}}$. Αυτή η διαδικασία δεν τελειώνει ποτέ, διότι κάτι τέτοιο θα προϋπέθετε την ισότητα μιας δύναμης του 2 με μια δύναμη του 3, πράγμα αδύνατο καθώς, για τους Πυθαγορείους, οι αριθμοί αυτοί εξέφραζαν αντίθετα πράγματα. Επομένως, φαίνεται απολύτως λογικό και σχεδόν αναπόφευκτο να πιστέψουμε ότι οι Πυθαγόρειοι (γύρω στο 430 π.Χ) συνειδητοποίησαν τελικά την αδυναμία τους να βρουν ένα κοινό μουσικό μέτρο.

<u>Η Αρμονική Ανθυφαίρεση</u>

Συνοψίζοντας τα τέσσερα πρώτα βήματα της διαδικασίας έχουμε:

$2/1 = 3/2 \cdot 4/3$, με $4/3 < 3/2$

$3/2 = 4/3 \cdot 9/8$, με $9/8 < 4/3$

$4/3 = (9/8)^2 \cdot 256/243$, με $256/243 < 9/8$

$9/8 = (256/243)^2 \cdot 531441/524288$, με $531441/524288 < 256/243$

Είναι ξεκάθαρο ότι το επόμενο βήμα θα ήταν μια σύγκριση του μεγαλύτερου λόγου 256/243 με τον μικρότερο λόγο 531441/524288. Είναι επίσης σαφές ότι, σύμφωνα με τις παραπάνω παρατηρήσεις σχετικά με τους λόγους άρτιος / περιττός και περιττός / άρτιος, η διαδικασία συνεχίζεται επ’ άπειρον.

Μ’ αυτόν τον τρόπο οι Πυθαγόρειοι ανακάλυψαν την ανθυφαίρεση ή, καλύτερα, ένα παράδειγμα αυτής, αυτό που ξεκινά με το 2/1 και το 3/2, έχει πολλαπλασιαστική παρά προσθετική μορφή και καλείται «αρμονική ανθυφαίρεση». Επιπλέον γράφουμε: Ανθ$\left(\frac{2}{1},\frac{3}{2}\right)=[1,1,2,2,\ldots]$

Βλέπουμε, λοιπόν, ότι αν ήταν δυνατό το πέρασμα στους λογαρίθμους, οι Πυθαγόρειοι θα είχαν καταλήξει στο συμπέρασμα ότι $\log 2/1$,$\log 3/2$ είναι ασύμμετροι και ότι ο λόγος $\frac{\log 2/1}{\log 3/2}$ είναι άρρητος αριθμός. Με τον τρόπο αυτό θα είχαν ανακαλύψει τον πρώτο άρρητο αριθμό. Κάτι τέτοιο, όμως, δεν ήταν δυνατό, αφού έπρεπε να εφαρμόσουν την πολλαπλασιαστική μορφή.

Από την Αρμονία στη Συμμετρία

Ο Oskar Becker ήταν ο πρώτος ιστορικός που ισχυρίστηκε ότι οι Έλληνες ανακάλυψαν την άπειρη ανθυφαίρεση πριν την πεπερασμένη διαδικασία της ανθυφαίρεσης για τους αριθμούς, δηλαδή τον ευκλείδειο αλγόριθμο. Αρχικά, ο καθηγητής Σ. Νεγρεπόντης τηρούσε μάλλον επιφυλακτική στάση απέναντι σε αυτή του θέση, καθώς θεωρεί ότι ο ευκλείδειος αλγόριθμος για τους αριθμούς είναι πολύ πιο απλός από την άπειρη ανθυφαιρετική διαδικασία. Ωστόσο, οι σκέψεις του Becker ήταν το έναυσμα για την παρακάτω ανακατασκευή από τον Σ. Νεγρεπόντη.

Έτσι, λοιπόν, για να περιγράψει την ατέρμονη διαδικασία της άπειρης ανθυφαίρεσης, ο καθηγητής αναφέρεται στην τελευταία πρόταση από το κείμενο του Νικόμαχου (*Εγχειρίδιον*, κεφάλαιο 9):

«οὕτως ἁρμονία πέντε ἐπογδόων καὶ δυοῖν διέσεοιν»
[η αρμονία αποτελείται από πέντε τόνους και δύο διέσεις]

(εδώ οι Πυθαγόρειοι με τη λέξη αρμονία υπονοούν την οκτάβα). Αυτό φυσικά αποτελεί μια σύντομη περιγραφή του γεγονότος ότι η οκτάβα έχει τη μορφή t t d t t t d, δηλαδή $2/1$ = $\mathrm{t}^5\mathrm{d}^2$. Έτσι, λοιπόν, ανακαλύπτει την αποδοχή του γεγονότος ότι δεν μπορεί να βρεθεί ένα μόνο κοινό μουσικό μέτρο, αλλά δύο, ο τόνος και η δίεση.

Στη συνέχεια, αναφέρεται σε ένα απόσπασμα από τα *Μεταφυσικά* του Αριστοτέλη:

«οὐκ ἀεὶ δὲ τῷ ἀριθμῷ εν τὸ μέτρον ἀλλ' ἐνίοτε πλείω, οἷον αἱ διέ-σεις δύο, αἱ μὴ κατὰ τὴν ἀκοὴν ἀλλ' ἐν τοῖς λόγοις, καὶ αἱ φωναὶ πλείους αἷς μετροῦμεν»
[Ο αριθμός των μέτρων δεν είναι πάντοτε ένα, αλλά μερικές φορές είναι μεγαλύτερος, όπως οι διέσεις είναι δύο, βέβαια όχι σύμφωνα με την ακοή αλλά σύμφωνα με τους λόγους και οι φωνές που μετρούμε περισσότερες]

Μέχρι εδώ, αυτή η πρόταση δηλώνει ό,τι κι εκείνη του Φιλολάου στο *Εγχειρίδιον* του Νικόμαχου. Βέβαια, θα μπορούσε να σημαίνει κάτι ισοδύναμο αλλά λίγο διαφορετικό, λαμβάνοντας ως μέτρα τη δίεση και την αποτομή, κάτι που θα συνεπαγόταν το εξής: $2/1 = \alpha^5 \mathrm{d}^7$.

Ακόμα πιο μεγάλο ενδιαφέρον παρουσιάζουν τα λεγόμενα του Αριστοτέλη στη συνέχεια:

« καὶ ἡ διάμετρος δυσὶ μετρεῖται καὶ ἡ πλευρά, καὶ τὰ μεγέθη πάντα»
[Η διάμετρος, επίσης, χρειάζεται δύο μέτρα και η πλευρά και όλα τα μεγέθη]

Ο κ. Σ. Νεγρεπόντης καταλήγει, μετά από όλα αυτά, στο συμπέρασμα ότι όπως τα δύο μέτρα που περιγράφονται από τον Φιλόλαο και τον Αριστοτέλη σχετίζονται άμεσα με την αρμονική ανθυφαίρεση, έτσι και τα δύο μέτρα που απαιτούνται για τη γεωμετρία (όπως φαίνεται μέσα από τα λόγια του Αριστοτέλη) καταδεικνύουν την ύπαρξη της γεωμετρικής ανθυφαίρεσης, ξεκινώντας από τη διαγώνιο και την πλευρά τετραγώνου και συνεχίζοντας με οποιαδήποτε δύο άλλα μεγέθη. Με τα παραπάνω γίνεται σαφές ότι το κρίσιμο κείμενο του Αριστοτέλη επηρεάζει τη μεταφορά της μεθόδου της ανθυφαίρεσης από την αρμονία στη γεωμετρία και πιο συγκεκριμένα στη συμμετρία.

<u>«ΕΥΚΛΕΙΔΟΥ ΚΑΤΑΤΟΜΗ ΚΑΝΟΝΟΣ»</u>

<u>Ποιος ήταν ο Ευκλείδης</u>

Εισάγοντας τον αναγνώστη του στην *«Κατατομή Κανόνος»*, ο Χαράλαμπος Σπυρίδης δίνει μερικά στοιχεία γι’ αυτόν και το έργο του:

Ο αρχαίος Έλληνας δάσκαλος της Αριθμητικής και της Γεωμετρίας Ευκλείδης έζησε περί το 330 με 270 π.Χ. Όσον αφορά την καταγωγή του, δεν είναι όλα γνωστά. Κατά μία παράδοση, ο Ευκλείδης γεννήθηκε στην πόλη Γέλα της Σικελίας. Αραβικές πηγές, όμως, τον φέρουν να γεννήθηκε στη Συρία, ίσως και στην Τύρο της Φοινίκης. Σπούδασε στην Αθήνα και, μόλις τελείωσε τις σπουδές του, επέστρεψε στην Αλεξάνδρεια, όπου προσκλήθηκε από τον βασιλιά της Αιγύπτου, τον Πτολεμαίο τον Α΄, να διδάξει Αριθμητική και Γεωμετρία.

Μνημειώδες έργο του Ευκλείδη είναι τα *«Στοιχεία»*. Το έργο αυτό αποτελείται από 13 βιβλία. Ειδικά τα βιβλία τα οποία πραγματεύονται τα στερεά σώματα, είναι εμπνευσμένα από την πυθαγόρεια και την πλατωνική φιλοσοφία. Άλλα έργα του είναι τα «*Φαινόμενα*», τα «*Οπτικά και Κατοπτρικά*», τα *«Δεδομένα»*, τα *«Κωνικά»*, τα *«Πορίσματα»*, τα *«Ψευδάρια»* και η *«Κατατομή Κανόνος»*.

<u>Κάποια στοιχεία για την «Κατατομή Κανόνος» - Andrew Barker vs. Andrew Barbera</u>

Στις παραγράφους που ακολουθούν γίνεται λόγος για την πατρότητα του έργου, για τη χρονολογική τοποθέτηση της συγγραφής του, για την ενιαία ή αποσπασματική συγγραφή του, για τις εμφανείς επιρροές του από και προς την πυθαγόρεια θεωρία της μουσικής, όλα αυτά μέσα από τα άλλοτε αλληλοσυμπληρούμενα και άλλοτε αντικρουόμενα επιχειρήματα των Andrew Barker και Andrew Barbera.

Είναι αλήθεια ότι τα μαθηματικά και οι φυσικές επιστήμες είναι τόπος της μουσικής (Πυριοβόλης Παναγιώτης). Η *«Κατατομή Κανόνος» (Sectio Canonis)* είναι το έργο εκείνο που καταπιάνεται με τον προσδιορισμό των αριθμητικών αναλογιών των φθόγγων της μουσικής κλίμακας πάνω στον κανόνα (ή αλλιώς μονόχορδο, κατά τον Πτολεμαίο, τον Ιάμβλιχο, τον Νικόμαχο). Ο κανών ή μονόχορδο ή χορδοτόνιο ήταν ένας βαθμονομημένος ξύλινος χάρακας, πάνω στον οποίο στηριζόταν μια ομοιόμορφα τεταμένη χορδή. Η χορδή αυτή μπορούσε κάθε φορά να διαιρείται με διαφορετικό τρόπο, ανάλογα με τη θέση που έπαιρνε ο κινούμενος ξύλινος καβαλάρης (στα αρχαία ελληνικά «μαγάς» ή «υπαγωγέας»), που βρισκόταν ακριβώς ανάμεσα σε εκείνη και τον χάρακα. Οι θιασώτες αυτής της σχολής ονομάζονταν «κανονικοί», ενώ όσοι τάσσονταν με τη σχολή του Αριστόξενου καλούνταν «μουσικοί ή εμπειρικοί». Ας γίνει ξεκάθαρο ότι η *«Κατατομή Κανόνος»* είναι ένα έργο που στηρίζεται αποκλειστικά στον μονόχορδο κανόνα. Κι αυτό γιατί οι αρχαίοι Έλληνες μουσικοί είχαν κι άλλους κανόνες, όπως ο οκτάχορδος, ο πεντεκαιδεκάχορδος και η κιθάρα.

Πρώτα απ' όλα, αξίζει να γίνει μια σύντομη αναφορά στους λόγους για τους οποίους η *«Κατατομή Κανόνος»* πρέπει να αντιμετωπιστεί ως αντιπροσωπευτική της πυθαγόρειας μουσικής και ακουστικής θεωρίας. Σύμφωνα με μεταγενέστερους σχολιαστές, υπάρχουν δύο βασικές διαφορές ανάμεσα στην πυθαγόρεια και την αριστοξένεια προσέγγιση: καταρχήν, η πρώτη αντιμετωπίζει τα διαστήματα ως λόγους αριθμών, ενώ η δεύτερη τα εκλαμβάνει ως αποστάσεις πάνω σε ένα γραμμικό συνεχές κι από την άλλη μεριά, η πυθαγόρεια προσέγγιση δίνει προτεραιότητα στην αιτία (λόγος) αντί της αισθητηριακής αντίληψης, ως κριτήριο για τη μουσική, ενώ η αριστοξένεια δίνει τον πρώτο λόγο στην αντίληψη. Η πρώτη διαφορά δείχνει ξεκάθαρα την πυθαγόρεια προέλευση της πραγματείας. Ο Πυθαγόρειος θεωρητικός χειρίζεται το μουσικό διάστημα με έναν τρόπο τελείως διαφορετικό από τον Αριστοξένειο κι αυτός ο χειρισμός χαρακτηρίζεται από τη χρήση της γλώσσας των λόγων (Πυριοβόλης Παναγιώτης).

Ο Andrew Barker, περιγράφοντας και ταυτόχρονα σχολιάζοντας την *«Κατατομή Κανόνος»*, γράφει στο βιβλίο του *«Greek Musical Writings»* ότι είναι ένα έργο αποτελούμενο από μια σύντομη εισαγωγή και από 20 προτάσεις - θεωρήματα, οι οποίες αναφέρονται σε θέματα μουσικής και εξετάζονται με βάση τα μαθηματικά της εποχής του Ευκλείδη. Υπάρχει αμφιβολία για το κατά πόσο η πραγματεία αυτή πρέπει να αποδοθεί στον Ευκλείδη. Κάποιοι μελετητές αμφισβήτησαν ότι το έργο αυτό είναι έργο ενός μόνο συγγραφέα ή ότι γράφτηκε σε μια συγκεκριμένη χρονική περίοδο. Ωστόσο ο Barker θεωρεί ότι δεν υπάρχουν βάσιμοι λόγοι για να πιστεύει κανείς ότι ο συγγραφέας του κύριου μέρους (τουλάχιστον των δεκαοκτώ πρώτων προτάσεων) της πραγματείας δεν είναι ο Ευκλείδης. Η υποψία για κάτι τέτοιο γεννάται από τις δύο τελευταίες προτάσεις, διότι προϋποθέτουν μια μορφή κλίμακας διαφορετική από αυτή που ζητείται στις προτάσεις 17 και 18. Αυτή η διαφορά, σύμφωνα με τον Andrew Barker, οφείλεται σε άλλους λόγους, πέρα από τον συγγραφέα.

Όσον αφορά την εισαγωγή, εκεί προκύπτουν κάποιες αμφιβολίες, καθώς έχει κριθεί από πολλούς ως αρκετά σύντομη και σε ορισμένα σημεία μέχρι και ασαφής, κάτι το οποίο έρχεται σε αντίθεση με την αρτιότητα που διέπει τις προτάσεις που έπονται αυτής. Η εισαγωγή ξεκινά με μια αναφορά στην εξάρτηση των ήχων και των τόνων τους από τις κινήσεις, δικαιολογώντας την αντιμετώπιση των τόνων ως σχετικών ποσοτήτων και των διαστημάτων μεταξύ τους ως αριθμητικών λόγων. Ακολουθούν εννέα καθαρά μαθηματικές προτάσεις, στις οποίες αποδεικνύονται ποικίλα θεωρήματα σχετικά με τους λόγους και με τα διαστήματα (εδώ όχι απαραιτήτως μουσικά διαστήματα, αλλά ποσοτικές διαφορές) μεταξύ των όρων των λόγων αυτών. Στη συνέχεια, στην πρόταση 10 εισάγονται οι μουσικές ιδέες, ενώ στις προτάσεις 10 έως 13 γίνεται ένας συνδυασμός των προηγούμενων εννέα προτάσεων, των επιχειρημάτων της εισαγωγής και κάποιων υποθέσεων που πηγάζουν από τη μουσική εμπειρία, με σκοπό να αποδειχθούν οι λόγοι των συμφωνιών, καθώς και του τόνου. Έπειτα, οι προτάσεις 14 έως 16 αποτελούν αποδείξεις βοηθητικών θέσεων, που προκύπτουν από μια «πυθαγόρεια» αντιμετώπιση των διαστημάτων ως λόγων και που έρχονται σε αντίθεση με την αριστοξένεια προσέγγιση. Η πρόταση 17 δείχνει τον τρόπο με τον οποίο μπορούμε να τοποθετήσουμε συγκεκριμένες νότες στο εναρμόνιο γένος με τη βοήθεια των λόγων. Από την άλλη μεριά, στην πρόταση 18 προβάλλεται ένα ακόμη πιο «αντι-αριστοξένειο» επιχείρημα για τα διαστήματα που σχηματίζονται με τον τρόπο αυτό. Τέλος, στις προτάσεις 19 και 20 παρατίθεται ο τρόπος με τον οποίο μπορούμε να χωρίσουμε τη χορδή ενός μονόχορδου σε λόγους που να συγκροτούν ένα σύστημα στο διατονικό γένος. Πρόκειται για την κατατομή του κανόνα, απ' όπου πήρε το όνομά του και ολόκληρο το έργο.

Ο συγγραφέας ενδιαφέρεται ξεκάθαρα να δώσει συστηματικές, τυπικές αποδείξεις των προτάσεων, οι οποίες να βασίζονται στην πυθαγόρεια και την πλατωνική παράδοση. Πρέπει να σημειωθεί το γεγονός ότι οι ορολογίες που χρησιμοποιεί δεν είναι καθαρά «λογικές» ή μαθηματικές, αλλά βασίζονται τόσο σε αποδεκτά γεγονότα της καθημερινής παρατήρησης, όσο και στις φυσικές και εννοιολογικές υποθέσεις που παρατίθενται στην εισαγωγή. Τα επιχειρήματα, λοιπόν, δεν λειτουργούν ως υποκατάστατα για τη μουσική εμπειρία. Αντιπροσωπεύουν μια προσπάθεια ερμηνείας των γεγονότων αυτής της εμπειρίας στη γλώσσα των μαθηματικών, όπου οι σημασίες και οι μεταξύ τους σχέσεις μπορούν να μελετηθούν με αυστηρό τρόπο (Barker).

Όπως υποστηρίζει ο Barker, ο συγγραφέας της *«Κατατομής Κανόνος»* γνώριζε σίγουρα την ύπαρξη δύο άλλων συγγραφέων: του Αρχύτα και του ίδιου του Ευκλείδη. Κι αυτό διότι, η μεν Πρόταση 3 του έργου αποτελεί παραλλαγή ενός σημαντικού θεωρήματος που αποδείχθηκε από τον Αρχύτα (αναφέρθηκε προηγούμενα), πολλές δε προτάσεις μοιάζουν με αυτές των *«Στοιχείων»* του Ευκλείδη. Από την άλλη, όμως, ο συγγραφέας αποκλίνει από τις αναλύσεις του Αρχύτα για το εναρμόνιο και το διατονικό γένος (Προτάσεις 17 ως 20). Οι δε διαιρέσεις του αντιστοιχίζονται περισσότερο σε αυτές του Φιλολάου και του Πλάτωνα, καθώς επίσης και σ' εκείνες των νεοπυθαγορείων (Θέων ο Σμηρνεύς, Νικόμαχος). Και πάλι, αν και οι προτάσεις με τις οποίες ο συγγραφέας ανοίγει το έργο του παραπέμπουν στον Αρχύτα, εκείνος διαφοροποιείται απ΄τον τελευταίο κι από την επικρατούσα παράδοση γενικότερα, με τη θεωρία του ήχου που επιχειρεί να υπογραμμίσει στην εισαγωγή.

Ωστόσο, ο Andrew Barker κρίνει απαραίτητο να επισημάνει δύο αδυναμίες στην πραγματεία. Η πρώτη σχετίζεται με τη μη ικανοποιητική φύση των υποθέσεων που συνδέουν τις συμφωνίες με τους πολλαπλάσιους και τους επιμόριους λόγους, στο τέλος της εισαγωγής. Κανείς Έλληνας συγγραφέας δεν βρήκε έναν αληθοφανή τρόπο να στηρίξει αυτή τη σχέση, αλλά η ύπαρξή της ήταν ένα επίμονο πυθαγόρειο δόγμα το οποίο, συν τοις άλλοις, οδήγησε σε σοβαρή σύγχυση γύρω από το λόγο 8:3. Η επιπλέον αδυναμία που εντοπίζει ο Barker έχει να κάνει με τη χρήση στην Πρόταση 11 της θέσης που αναπτύσσεται στην εισαγωγή για τις συμφωνίες. Το επιχείρημα εκεί έχει εσφαλμένη βάση - κάτι το οποίο αποτελεί έκπληξη για ένα έργο τόσης τυπικής αυστηρότητας – και η πρόταση που βασίζεται σε αυτό είναι κρίσιμη για τα επακόλουθα.

Παρ' όλα αυτά, ο Andrew Barker θεωρεί την *«Κατατομή Κανόνος»* μια εύστοχη προσπάθεια για την κατασκευή εμπεριστατωμένων μαθηματικών αρμονικών, αν και από μια μάλλον περιορισμένη σκοπιά. Συγκρίνει, δε, τη σχέση του έργου με προηγούμενες πυθαγόρειες έρευνες και αυτή των *«Στοιχείων»* του Ευκλείδη με τους προηγούμενούς του στη Γεωμετρία. Τέλος, αυτό που ο Barker εντοπίζει ως το πιο αξιοσημείωτο δεν είναι ούτε αυτά που πραγματεύεται το έργο, ούτε οι αποδείξεις των θεωρημάτων του, αλλά ο τρόπος με τον οποίο όλο το σύστημα των θεωρημάτων ενσωματώνεται σε μία ολότητα.

Ο Andrew Barbera απαντά στον Barker σχετικά με την πατρότητα και την ημερομηνία της πραγματείας, την εισαγωγή, κάποια θεωρήματα και ουσιαστικά για την ιστορική και φιλοσοφική κατεύθυνση της *«Κατατομής Κανόνος»*.

Ο Barker επιλέγει να αποφύγει το θέμα της πατρότητας της *«Κατατομής Κανόνος»*. Ωστόσο, κατά τον Barbera, τα ερωτήματα «ποιος» και «πότε» είναι κρίσιμα για την εύρεση μιας απάντησης στο ερώτημα «γιατί». Με άλλα λόγια, θα μπορούσαμε να εκτιμήσουμε καλύτερα την *«Κατατομή Κανόνος»*, αν μπορούσαμε να την τοποθετήσουμε στο ιστορικό της πλαίσιο.

Η τμηματική φύση του έργου απασχολεί ιδιαιτέρως τον Andrew Barbera. Κατά τον τελευταίο, φαίνεται να δείχνει περισσότερους από έναν συγγραφείς, καθώς περιλαμβάνει: μια εισαγωγή, εννέα καθαρά μαθηματικά θεωρήματα – τρία από τα οποία βασίζονται σε προτάσεις που περιέχονται στο βιβλίο VIII των *«Στοιχείων»* του Ευκλείδη -, επτά γενικά ακουστικά θεωρήματα, τα οποία σχετίζονται με την εισαγωγή και τα πρώτα εννέα θεωρήματα, δύο θεωρήματα που αφορούν το εναρμόνιο γένος και, τέλος, δύο θεωρήματα που αφορούν τη διαίρεση μιας χορδής σύμφωνα με το διατονικό γένος. Από αυτά τα δύο τελευταία θεωρήματα προκύπτει και το όνομα της πραγματείας. Μάλιστα, δύο επανεμφανίσεις της *«Κατατομής Κανόνος»* στην ύστερη αρχαιότητα υπογραμμίζουν την τμηματική φύση της: τα σχόλια του Πορφύριου για το έργο του Πτολεμαίου *«Harmonics»* και το έργο του Βοήθειου *«De Musica»*.

Ο Πορφύριος παρουσιάζει τα θεωρήματα 1 – 16 μεμονωμένα και δίνει μια εκδοχή αυτών η οποία είναι όμοια – αλλά όχι ίδια - με την εκδοχή του Ευκλείδη. Αναρωτιέται, όμως, κανείς πού είναι η εισαγωγή και τα τέσσερα τελευταία θεωρήματα. Λίγο πριν δώσει τα θεωρήματα 1 – 16, ο Πορφύριος αναφέρεται στη «διαίρεση του μονόχορδου» του Ευκλείδη, αλλά, χωρίς τις δύο τελευταίες προτάσεις (19 και 20), ο τίτλος δεν συνάδει με τα υπόλοιπα θεωρήματα. Από την άλλη, ο Βοήθειος, στην αρχή του τέταρτου βιβλίου του έργου του *«De Musica»*, δίνει μια δική του ερμηνεία της εισαγωγής και των πρώτων εννέα θεωρημάτων. Η εκδοχή που προτείνει για την εισαγωγή διαφέρει σε πολλά σημεία από αυτή του Ευκλείδη. Για παράδειγμα, στον ορισμό του για τις σύμφωνες νότες ως μίγμα, ο Βοήθειος εισάγει την έκφραση «δονούμενες την ίδια στιγμή» ([simul pulsae]), αναφερόμενος στις μεμονωμένες νότες που παράγουν μια συμφωνία. Το ελληνικό ισοδύναμο αυτής της έκφρασης ([άμα κρούω]) υπάρχει στους περισσότερους πυθαγόρειους ορισμούς, όχι όμως στην *Κατατομή Κανόνος*. Επιπλέον, σε αντίθεση με την *Κατατομή Κανόνος*, ο Βοήθειος δεν κάνει τη σύνδεση μεταξύ ενός μεμονομένου ονόματος ή μιας συγκεκριμένης ορολογίας για τους πολλαπλάσιους ή τους επιμόριους λόγους και του μεμονωμένου μίγματος ήχων που παράγεται από δύο σύμφωνες νότες. Στην περίπτωση των θεωρημάτων, ο Βοήθειος παρεμβάλλει αριθμητικές αποδείξεις, που παραλληλίζονται με τις γνήσιες γεωμετρικές αποδείξεις. Σε κανένα σημείο αυτού του κειμένου ο Βοήθειος, ή όποιος άλλος συγγραφέας που αυτός ακολουθεί (όπως ο Νικόμαχος), δεν παραπέμπει στον Ευκλείδη ή δίνει τίτλο όπως *«Κατατομή Κανόνος»*.

Κατά τον Barbera, μια λεπτομερής σύγκριση των τριών εκδοχών (του Ευκλείδη, του Πορφύριου και του Βοήθειου), όπου αυτή είναι δυνατή (θεωρήματα 1 – 9), μας αποτρέπει από το να θεωρήσουμε τη μία από αυτές ως μοντέλο με βάση το οποίο δημιουργήθηκαν οι άλλες δύο. Για παράδειγμα, κάθε εκδοχή χρησιμοποιεί μοναδική σειρά αλφαβητικών μεταβλητών στο Θεώρημα 3. Ξεχωριστά από τον Πορφύριο και την «Κατατομή Κανόνος», ο Βοήθειος παρεμβάλλει αριθμητικές αποδείξεις στα θεωρήματα 1 ως 4 και 6 ως 9. Στο θεώρημα 6, ο Πορφύριος παραλείπει μια ανακεφαλαιωτική φράση που περιλαμβάνεται στο *«De Musica»* και στην *Κατατομή Κανόνος*.

Οι τρεις εκδοχές της πραγματείας σε συνδυασμό με την τμηματική φύση της - η εισαγωγή και τα πρώτα δεκαέξι θεωρήματα, χωρίς τον τίτλο, θα αποτελούσαν μια σχεδόν αυθύπαρκτη μουσική πραγματεία - εγείρουν ερωτήματα σχετικά με τον αριθμό των μελετητών της. Η ανομοιότητα ανάμεσα στις τρεις εκδοχές των θεωρημάτων 1 ως 9 και η ανικανότητά μας να επιλέξουμε μία απ’ αυτές ως μοντέλο αναδεικνύουν μια σύνθετη σύσταση της πραγματείας που αποκαλείται *«Κατατομή Κανόνος»*. Το κατά πόσο αυτή ή μέρος της γράφτηκαν από τον Ευκλείδη, είναι ένα άλλο θέμα, σύμφωνα με τον Barbera.

Όσον φορά την πατρότητα του έργου, ο Barbera επιχειρηματολογεί υπέρ του Ευκλείδη: μαζί με τη *«Διαίρεση του μονόχορδου από τον Ευκλείδη»*, ο Πορφύριος αναφέρει τα *«Στοιχεία της Μουσικής»*. Τόσο ο Πρόκλος, όσο και ο μαθητής του Μαρίνος, αναφέρουν επίσης ότι ο Ευκλείδης έγραψε τα *«Στοιχεία της Μουσικής»*. Αυτές οι παρατηρήσεις αποτελούν αποδεικτικά στοιχεία που μάλλον επιτρέπουν την απόδοση του έργου στον Ευκλείδη. Υπάρχουν, βέβαια, και πιο συγκεκριμένοι λόγοι για κάτι τέτοιο: με εξαίρεση τα θεωρήματα 19 και 20, τα υπόλοιπα έχουν τη μορφή στην οποία διατυπώνονται και οι προτάσεις των *«Στοιχείων»* του Ευκλείδη.

Ωστόσο, το ύφος και τα περιεχόμενα της *«Κατατομής Κανόνος»* έχουν διχάσει τους σύγχρονους μελετητές όσον αφορά το θέμα της απόδοσης της πραγματείας στον Ευκλείδη. Ο Karl von Jan, ένας σύγχρονος εκδότης της *«Κατατομής Κανόνος»*, ήταν πεπεισμένος ότι το έργο ανήκει στον Ευκλείδη, λόγω της γλώσσας που χρησιμοποιούταν, ενώ ο Paul Tannery θεωρούσε ότι δεν μπορούμε να αποδώσουμε το έργο στον Ευκλείδη , βασιζόμενοι στο περιεχόμενο. Ο Tannery κατέληξε στο συμπέρασμα ότι ο κύριος όγκος της *«Κατατομής Κανόνος»* είχε γραφτεί πριν τον Αριστόξενο και ότι πιθανώς ήταν ένα προϊόν της Ακαδημίας του Πλάτωνα. Διαβάζοντας δε τις περίφημες σημειώσεις του Πλάτωνα για τις Αρμονικές στο *Republic* (530c-531c), ο Tannery, όπως και ο Barker, προτείνει ότι η *«Κατατομή Κανόνος»* θα μπορούσε να είναι μια απάντηση στην κριτική του Πλάτωνα. Ο Andrew Barbera, στο άρθρο του *«Republic 530c-531c: Another look at Plato and the Pythagoreans»*, έχει δείξει ότι ο Πλάτωνας ενδέχεται να μην απευθύνει την κριτική του στους Πυθαγορείους και ότι, σε περίπτωση που το κάνει, οι παρατηρήσεις του είναι συγκεχυμένες και συχνά φάσκει και αντιφάσκει. Άλλοι μελετητές έχουν δει την *«Κατατομή Κανόνος»* ως μια «δήθεν» απάντηση στην πραγματεία του Αριστόξενου περί μουσικής. Ο Thomas Mathiesen παρατηρεί ότι η *«Κατατομή Κανόνος»*, και κυρίως οι ακουστικές προτάσεις της, θα μπορούσαν να είναι μια προσπάθεια «συμφιλίωσης της πυθαγόρειας με την αριστοξένεια σχολή, ή αλλιώς της μαθηματικής με την εμπειρική σχολή». Από την άλλη μεριά, ο Barker δεν επιχειρεί τη συμφιλίωση ανάμεσα στην πυθαγόρεια και την αριστοξένεια μουσική θεωρία και εντοπίζει «μερικές τεράστιες διαφωνίες». Ο Βοήθειος υποστηρίζει ότι, στην αρχαιότητα, η πυθαγόρεια και η αριστοξένεια θεωρία ήταν ασυμβίβαστες, τουλάχιστον για πολλούς.

Ωστόσο, εύλογα αναδύονται κάποια ερωτήματα στο νου του Barbera: γιατί ο Νικόμαχος δεν αναφέρεται ούτε στην *«Κατατομή Κανόνος»* αλλά ούτε και στον Ευκλείδη στο έργο του *«Εγχειρίδιο των Αρμονικών»*; Γιατί ο Πτολεμαίος, ο οποίος αποδίδει τις μουσικές θεωρίες στον Αρχύτα, τον Αριστόξενο, τον Ερατοσθένη και τον Δίδυμο, συνδέει τη βασική αρχή της συμφωνίας που περιλαμβάνεται στην εισαγωγή της *«Κατατομής Κανόνος»* με τους Πυθαγορείους παρά με τον Ευκλείδη; Ίσως ο Πορφύριος και ο Βοήθειος συνέθεσαν την πραγματεία και η ημερομηνία της σύνθεσης μπορεί να είναι κατοπινή του 4ου π.Χ. αιώνα. Θα μπορούσε, επίσης, κανείς να εικάσει ότι η *«Κατατομή Κανόνος»* είναι ένα προϊόν της Πυθαγόρειας ή της νεοπυθαγόρειας αναγέννησης της ύστερης αρχαιότητας κι ότι η πραγματεία πήρε τη μορφή που γνωρίζουμε στα χρόνια μετά τον Πορφύριο.

Η γνώμη του Barbera για την εισαγωγή της *«Κατατομής Κανόνος»* είναι ότι πρόκειται για το πιο σημαντικό πυθαγόρειο κείμενο για τη μουσική θεωρία, διότι εκεί διαβάζουμε το πυθαγόρειο δόγμα πάνω στις αρμονικές. Ο συγγραφέας της εισαγωγής παρατηρεί ότι οι γρήγοροι παλμοί [πληγαί] παράγουν υψηλούς τόνους κι ότι οι αραιοί παλμοί παράγουν χαμηλούς τόνους. Κατά τον Barker, ωστόσο, αν κάποιος υποθέσει ότι η πρόταση αφορά σε μήκη χορδής, τότε πρέπει να συμβεί μια αριθμητική ψευδο-αντιστροφή, δηλαδή οι μεγάλου μήκους χορδές παράγουν χαμηλούς τόνους, ενώ οι μικρού μήκους χορδές παράγουν υψηλούς τόνους. Βέβαια, με εξαίρεση τα δύο τελευταία θεωρήματα, δεν είναι απαραίτητο οι χορδές να είναι το αντικείμενο της συζήτησης. Η *«Κατατομή Κανόνος»* καταπιάνεται με διαστήματα, είτε αυτά είναι μαθηματικά ή αριθμητικά, είτε είναι μουσικά. Από την άλλη, τα σχέδια γραμμών που υπάρχουν στα χειρόγραφα αναπαριστούν χορδές κι αυτό μπορεί να μας παραπλανήσει. Αν και οι δύο τελευταίες προτάσεις πράγματι αφορούν τη διαίρεση μιας χορδής, δεν χρησιμοποιούν αριθμούς στις αποδείξεις τους. Επιπλέον, αυτές οι δύο αποδείξεις έχουν μια ανεπαίσθητη σχέση με τις υπόλοιπες της πραγματείας, όπως έχουν παρατηρήσει σχεδόν όλοι οι μελετητές του έργου. Ο Van der Waerden συνόψισε την κατάσταση, σημειώνοντας ότι «όταν έχουμε να κάνουμε με πυθαγόρεια κείμενα, θα πρέπει να έχουμε κατά νου ότι οι λόγοι αναπαριστούν την έννοια των διαστημάτων και όχι απαραίτητα λόγους παλμών ή λόγους μηκών χορδών».

Στη συνέχεια, ο Barbera σχολιάζει την παρατήρηση του Barker γύρω από την πρόταση 11 του έργου και τον παραλογισμό που, κατ’ εκείνον, ενέχει. Η απόδειξη της πρότασης αυτής βασίζεται στην παρατήρηση ότι, από τη στιγμή που το διάστημα της διπλής τετάρτης (8:3) δεν είναι σύμφωνο, δεν μπορεί να είναι πολλαπλάσιο. Στην εισαγωγή ο συγγραφέας ισχυρίζεται ότι όλα τα σύμφωνα διαστήματα είναι είτε επιμόρια είτε πολλαπλάσια, αλλά όχι ότι όλα τα πολλαπλάσια διαστήματα είναι σύμφωνα – κι αυτή η τελευταία θέση απαιτείται για την απόδειξη της πρότασης 11.

Ως προς τις αδυναμίες που εντοπίζει ο Barker στο έργο, ο Barbera ισχυρίζεται τα εξής: πρώτα απ’ όλα, το σύστημα που χρησιμοποιείται στην *«Κατατομή Κανόνος»* είναι ένα σύστημα δύο οκτάβων. Αν και η *«Κατατομή Κανόνος»* δεν είναι σαφής πάνω στο θέμα, οι περισσότερες μουσικές θεωρίες στην αρχαιότητα, και κυρίως η Πυθαγόρεια, περιορίζονται στο σύστημα των δύο οκτάβων. Σ’ αυτό το σύστημα, όλοι οι πολλαπλάσιοι λόγοι είναι σύμφωνοι. Γι’ αυτό, αν η διπλή τετάρτη (8:3) δεν είναι σύμφωνη, τότε δεν μπορεί να είναι πολλαπλάσια.

Δεύτερον, εκτός από τον περιορισμό στο σύστημα των δύο οκτάβων, η *«Κατατομή Κανόνος»* περιορίζεται και αριθμητικά στους αριθμούς της τετρακτύος 1, 2, 3 και 4, όταν τίθεται το θέμα της συμφωνίας. Πληθώρα πυθαγορείων κειμένων από την αρχαιότητα ορίζουν ως σύμφωνα μόνο εκείνα τα διαστήματα που συντίθεται συσχετίζοντας οποιουσδήποτε δύο όρους της τετρακτύος. Το αποτέλεσμα αυτού του ορισμού είναι ο περιορισμός, στο σύστημα των δύο οκτάβων, του πλήθους των συμφωνιών σε πέντε (τετάρτη, πέμπτη, οκτάβα, οκτάβα και μια πέμπτη, διπλή οκτάβα) και των κατηγοριών των λόγων σε πολλαπλάσιους και επιμόριους (4:2= 2:1, 3:1, 2:1, 3:2, 4:3).

Όσον αφορά το διάστημα της οκτάβας και μια τετάρτη (8:3), και σύμφωνα με τον Barbera, ο Barker ισχυρίζεται ότι η *«Κατατομή Κανόνος»* σιωπά, όμως πλανάται όταν ισχυρίζεται ότι «κανείς δεν φαίνεται να έχει αμφισβητήσει» το σύνθετο χαρακτήρα αυτού του σύνθετου διαστήματος. Ο Barker συνεχίζει λέγοντας ότι η απόρριψη εκ μέρους των Πυθαγορείων αυτού του διαστήματος από την κατηγορία των συμφωνιών «είναι καθαρά αθέμιτη», γιατί η βάση της είναι αριθμητική και όχι ακουστική – το 8:3 δεν είναι ούτε πολλαπλάσιο ούτε επιμόριο, αλλά πολλαπλάσιο επιμερές. Το επιχείρημα του Barker στηρίζεται στο γεγονός ότι η οκτάβα και μια τετάρτη ακούγεται σύμφωνη. Από τη στιγμή που η *«Κατατομή Κανόνος»* προσδιορίζει τις συμφωνίες σε μια ακουστική βάση, ο Barker την κρίνει που δεν συμπεριλαμβάνει το διάστημα 8:3 στις συμφωνίες. Η συμφωνία ή μη ενός διαστήματος, ωστόσο, είναι σχετικό θέμα και εξαρτάται τόσο από την αισθητηριακή αντίληψη, όσο και από το σύστημα. Ο σύμφωνος χαρακτήρας του 8:3 δεν είναι σε καμία περίπτωση βέβαιος και το θέμα αυτό αποτέλεσε αντικείμενο πολλών συζητήσεων. Οι Αριστοξένειοι και ο Πτολεμαίος το είχαν εντάξει μεταξύ των σύμφωνων διαστημάτων, αλλά η κριτική του Πτολεμαίου για τη μη αποδοχή του 8:3 ως σύμφωνου διαστήματος δείχνει ότι οι αρχαίοι θεωρητικοί δεν αντιμετώπιζαν ομόφωνα το θέμα. Αντίθετα με την *«Κατατομή Κανόνος»*, ο Βοήθειος και ο Πλούταρχος απορρίπτουν κατηγορηματικά την οκτάβα και μια τετάρτη, διότι δεν είναι σύμφωνο διάστημα. Σε κάποιους Πυθαγορείους το διάστημα ακουγόταν μη σύμφωνο γιατί ο αριθμητικός του χαρακτηρισμός όχι μόνο περιελάμβανε τον αριθμό 8, ο οποίος δεν υπήρχε μέσα στην τετρακτύ, αλλά ήταν λόγος πολλαπλάσιος επιμερής, δηλαδή ανήκε στο είδος των λόγων που ήταν το πιο απομακρυσμένο από την ομορφιά της μονάδας και της ισότητας. Η ορθόδοξη πυθαγόρεια θέση στο θέμα είναι ακριβώς η αντίθετη από αυτή του Barker: η οκτάβα και μια τετάρτη δεν ακούγεται σύμφωνη, γιατί όλες οι συμφωνίες είναι είτε πολλαπλάσιες είτε επιμόριες.

Ο Barbera καταλήγει στο συμπέρασμα ότι πρέπει να κρατούμε την πυθαγόρεια παράδοση στο μυαλό μας, όταν διαβάζουμε την *«Κατατομή Κανόνος»*. Το γεγονός ότι η εισαγωγή αποτελεί ένα έρεισμα για την κατασκευή της πυθαγόρειας θεωρίας της μουσικής δεν αμφισβητείται. Όμως, αυτά τα θεμέλια πρέπει να υποστηριχθούν με το επιπλέον πυθαγόρειο δόγμα που αφορά την τετρακτύ. Επιπλέον, όλη η πραγματεία πρέπει να διαβαστεί με το σύστημα των δύο οκτάβων κατά νου.

Το ύφος και η γλώσσα στην *«Κατατομή Κανόνος»* μοιάζουν με τα αντίστοιχα των *«Στοιχείων»* του Ευκλείδη και δύσκολα μπορεί να υπάρξει αμφιβολία για το γεγονός ότι το έργο ανήκει στον Ευκλείδη. Από την άλλη μεριά, είναι επικίνδυνο να περιμένει κανείς από την *«Κατατομή Κανόνος»* μια καθαρή και γενική θεωρία της ακουστικής, όμοια με αυτή που θεμελίωσε ο Ευκλείδης για τη γεωμετρία. Στα *«Στοιχεία»* βρίσκουμε μια αφηρημένη θεωρία της γεωμετρικής και αριθμητικής αλήθειας, που εφαρμόζεται αμερόληπτα στο φυσικό κόσμο. Με την *«Κατατομή Κανόνος»*, η διάκριση ανάμεσα στο υλικό και το άυλο, είτε μεταξύ ήχου και αριθμού είτε μεταξύ ήχου και γραμμής, δεν είναι ξεκάθαρη. Η σχέση ανάμεσα στον αριθμό και τον ήχο αποτελούσε θαύμα και μυστήριο για τους Πυθαγορείους.

Σύμφωνα με τον Andrew Barbera, η *«Κατατομή Κανόνος»* θα πρέπει να διαβάζεται από την οπτική των Πυθαγορείων. Παρά το «ευκλείδειο» ύφος της, προτείνει να την προσεγγίζουμε από τη μεριά του Νικόμαχου ή του Θέωνα του Σμυρνέα, παρά από αυτή του Ευκλείδη.

Στη συνέχεια παραθέτουμε το έργο με την εισαγωγή, τις είκοσι προτάσεις και κάποια σχόλια. Τα τελευταία, ανήκουν κατά κύριο λόγο στο μουσικό, φυσικό και καθηγητή της Μουσικής Ακουστικής και Πληροφορικής του Πανεπεστημίου Αθηνών, Χ. Σπυρίδη, ο οποίος και επιμελήθηκε τη δημοσίευση αυτού του έργου. Όσα σχόλια, δε, δεν φέρουν την υπογραφή του Χ. Σπυρίδη, ανήκουν στον Andrew Barker, όπως αυτός τα κατέγραψε στο βιβλίο του *«Greek Musical Writings»* και στο άρθρο του *«Methods and Aims in the Euclidean Sectio Canonis»*.

ΤΟ ΕΡΓΟ

Εισαγωγή

«Εἰ ἡσυχία εἴη καὶ ἀκινησία, σιωπὴ ἂν εἴη· σιωπῆς δὲ οὔσης καὶ μηδενὸς κινουμένου οὐδὲν ἂν ἀκούοιτο· εἰ ἄρα μέλλει τι ἀκουσθήσεσθαι, πληγὴν καὶ κίνησιν πρότερον δεῖ γενέσθαι. ὥστε, ἐπειδὴ πάντες οἱ φθόγγοι γίνονται πληγῆς τινος γινομένης, πληγὴν δὲ ἀμήχανον γενέσθαι μὴ οὐχὶ κινήσεως πρότερον γενομένης, –τῶν δὲ κινήσεων αἱ μὲν πυκνότεραί εἰσιν, αἱ δὲ ἀραιότεραι, καὶ αἱ μὲν πυκνότεραι ὀξυτέρους ποιοῦσι τοὺς φθόγγους, αἱ δὲ ἀραιότεραι βαρυτέρους, –ἀναγκαῖον τοὺς μὲν ὀξυτέρους εἶναι, ἐπείπερ ἐκ πυκνοτέρων καὶ πλειόνων σύγκεινται κινήσεων, τοὺς δὲ βαρυτέρους, ἐπείπερ ἐξ ἀραιοτέρων καὶ ἐλασσόνων σύγκεινται κινήσεων. ὥστε τοὺς μὲν ὀξυτέρους τοῦ δέοντος ἀνιεμένους ἀφαιρέσει κινήσεως τυγχάνειν τοῦ δέοντος, τοὺς δὲ βαρυτέρους ἐπιτεινομένους προσθέσει κινήσεως τυγχάνειν τοῦ δέοντος. διόπερ ἐκ μορίων τοὺς φθόγγους συγκεῖσθαι φατέον, ἐπειδὴ προσθέσει καὶ ἀφαιρέσει τυγχάνουσι τοῦ δέοντος. πάντα δὲ τὰ ἐκ μορίων συγκείμενα ἀριθμοῦ λόγῳ λέγεται πρὸς ἄλληλα, ὥστε καὶ τοὺς φθόγγους ἀναγκαῖον ἐν ἀριθμοῦ λόγῳ λέγεσθαι πρὸς ἀλλήλους· τῶν δὲ ἀριθμῶν οἱ μὲν ἐν πολλαπλασίῳ λόγῳ λέγονται, οἱ δὲ ἐν ἐπιμορίῳ, οἱ δὲ ἐν ἐπιμερεῖ, ὥστε καὶ τοὺς φθόγγους ἀναγκαῖον ἐν τοῖς τοιούτοις λόγοις λέγεσθαι πρὸς ἀλλήλους. τούτων δὲ οἱ μὲν πολλαπλάσιοι καὶ ἐπιμόριοι ἑνὶ ὀνόματι λέγονται πρὸς ἀλλήλους.

Γινώσκομεν δὲ καὶ τῶν φθόγγων τοὺς μὲν συμφώνους ὄντας, τοὺς δὲ διαφώνους, καὶ τοὺς μὲν συμφώνους μίαν κρᾶσιν τὴν ἐξ ἀμφοῖν ποιοῦντας, τοὺς δὲ διαφώνους οὔ. τούτων οὕτως ἐχόντων εἰκὸς τοὺς συμφώνους φθόγγους, ἐπειδὴ μίαν τὴν ἐξ ἀμφοῖν ποιοῦνται κρᾶσιν τῆς φωνῆς, εἶναι τῶν ἐν ἑνὶ ὀνόματι πρὸς ἀλλήλους λεγομένων ἀριθμῶν, ἤτοι πολλαπλασίους ὄντας ἢ ἐπιμορίους.»

Μετάφραση

«Αν υπήρχε ησυχία και ακινησία, θα υπήρχε σιωπή. Όταν, λοιπόν, υπάρχει σιωπή και τίποτα δεν κινείται, τίποτα δεν ακούγεται. Άρα, εάν κάτι πρόκειται να γίνει ακουστό, πρέπει προηγουμένως να υπάρξει κτύπημα και κίνηση[1]. Ώστε, επειδή όλοι οι φθόγγοι παράγονται από κάποια κρούση που συμβαίνει και η κρούση δεν είναι δυνατόν να συμβεί χωρίς προηγουμένως να υπάρξει κίνηση – από τις κινήσεις δε, άλλες μεν είναι πυκνότερες, άλλες δε είναι αραιότερες και οι μεν πυκνότερες (κινήσεις) παράγουν οξύτερους φθόγγους, οι δε αραιότερες (κινήσεις παράγουν) τους βαρύτερους (φθόγγους) - είναι απαραίτητο οι μεν να είναι οξύτεροι μόνο και μόνο επειδή συνίστανται από πυκνότερες και περισσότερες κινήσεις, οι δε να είναι βαρύτεροι, μόνο και μόνο επειδή συνίστανται από αραιότερες και μικρότερες (με την έννοια του «λιγότερες» κινήσεις)[2].

Ώστε οι μεν οξύτεροι του πρέποντος (φθόγγοι), χαλαρούμενοι[3] με αφαίρεση κινήσεως να καθίστανται οι πρέποντες, οι δε βαρύτεροι (φθόγγοι) τεινόμενοι[3] με πρόσθεση κινήσεως να καθίστανται οι πρέποντες. Γι' αυτόν το λόγο πρέπει να λεχθεί ότι οι φθόγγοι συνίστανται από μόρια, επειδή με πρόσθεση και αφαίρεση (μορίων) καθίστανται οι πρέποντες.

Όλα όσα δεν συνίστανται από μόρια εκφράζονται μεταξύ τους με έναν αριθμητικό λόγο[4] (μια αριθμητική σχέση), ώστε είναι απαραίτητο και οι φθόγγοι με έναν αριθμητικό λόγο να εκφράζονται μεταξύ τους. Από τους αριθμούς, άλλοι μεν σχετίζονται με λόγο πολλαπλάσιο, άλλοι δε με λόγο επιμόριο και άλλοι με λόγο επιμερή[5], ώστε είναι απαραίτητο και οι σχέσεις των φθόγγων να εκφράζονται με τέτοιους λόγους αριθμών. Από αυτούς δε (τους αριθμούς) η σχέση μεταξύ των πολλαπλασίων (αριθμών) και των επιμορίων (αριθμών) προφέρεται μονολεκτικά[6].

Επιπροσθέτως, γνωρίζουμε ότι από τους φθόγγους άλλοι μεν είναι σύμφωνοι, άλλοι δε διάφωνοι και οι μεν σύμφωνοι φθόγγοι μια κράση (ένα σύνθετο ήχο) οι δυο τους δημιουργούν, οι δε διάφωνοι όχι.

Έτσι εχόντων των πραγμάτων (των σχετικών με τους φθόγγους), είναι φυσικό οι σύμφωνοι φθόγγοι, επειδή οι δυο τους δημιουργούν μια κράση φωνής (ένα σύνθετο ήχο), να εκφράζονται με αριθμούς που η μεταξύ τους σχέση προφέρεται μονολεκτικά, δηλαδή αυτούς που είναι πολλαπλάσιοι ή επιμόριοι[7]».

ΣΧΟΛΙΑ

1. Αυτές οι φράσεις δείχνουν τη σαφή επιρροή του συγγραφέα από τον Αρχύτα, η οποία είναι εμφανής σε όλο το έργο, ιδιαιτέρως στην πρόταση 3 (Barker).

2. Πολλοί άλλοι συγγραφείς στρέφουν την προσοχή τους στο γεγονός ότι συνεχείς ήχοι παράγονται από μια σειρά διακριτών κρούσεων ενός σώματος (π.χ. μιας παλλόμενης χορδής στον αέρα) κι ότι οι κρούσεις είναι πιο πυκνές ή συχνές στην περίπτωση μιας υψηλής νότας. Κανείς τους όμως δεν ισχυρίζεται ότι η μεγάλη συχνότητα των κρούσεων είναι αυτή που προκαλεί τον υψηλό τόνο. Η μεγαλύτερη συχνότητα μπορεί απλά να θεωρηθεί ως το αίτιο της μεγάλης ταχύτητας κι είναι σαφές ότι οι υψηλότεροι τόνοι παράγονται λόγω μεγαλύτερης ταχύτητας διάδοσης. Μόνο ο παρών συγγραφέας αρθρώνει την άποψη ότι η συχνότητα των κρούσεων είναι υπεύθυνη για τον τόνο μιας νότας. Περισσότερες και πιο «πυκνές» κινήσεις παράγουν υψηλότερους ήχους απ' ότι λιγότερες και πιο «αραιές».

3. Κατά τον συγγραφέα, οι ήχοι αποτελούνται από μέρη (μόρια), «επειδή με πρόσθεση και αφαίρεση (μορίων) καθίστανται οι πρέποντες». Οι ήχοι διαφορετικών τόνων θα πρέπει να μπορούν να συσχετιστούν μεταξύ τους μέσω αριθμητικών λόγων, από τη στιγμή που όλα τα πράγματα που συντίθεται από μέρη συσχετίζονται με αυτόν τον τρόπο. Στη μουσική των Ελλήνων, ο όρος «μόριον» σημαίνει «λόγος». Μάλιστα, αν κανείς μελετήσει βαθιά τον Ευκλείδη, διατηρώντας αναλλοίωτους τους ορισμούς και αντικαθιστώντας μόνο τον όρο «μόριο» με τη λέξη «Hertz» (μονάδα μέτρησης της συχνότητας των ήχων), παίρνει ορισμούς πλήρεις και ακόλουθους με αυτούς που υπάρχουν στη σύγχρονη Φυσική.

Οι μετοχές «χαλαρούμενοι» και «τεινόμενοι» έχουν την έννοια του «κατεβάζω τον τόνο» και «ανεβάζω τον τόνο» αντίστοιχα κι επομένως μπορούν να εφαρμοστούν τόσο σε νότες όσο και σε χορδές. Η παρούσα θέση είναι ότι το «χαλάρωμα» μιας χορδής «χαλαρώνει» τη νότα (κατεβάζει τον τόνο), μειώνοντας την ταχύτητα των κινήσεων μπρος – πίσω της χορδής και κατ’ επέκταση ελαττώνοντας τη συχνότητα των κρούσεών της με τον αέρα.

4. Ένα ελκυστικό σημείο στη θεωρία του συγγραφέα είναι ότι η μεταβλητή με την οποία ορίζεται ο τόνος διαφοροποιείται με τρόπο διακριτό και όχι συνεχή. Σε μια δεδομένη στιγμή, μια παλλόμενη χορδή κτυπά τον αέρα τόσες φορές όσες εκφράζει ένας ολόκληρος αριθμός κι η σχέση μεταξύ των κρούσεων – συχνοτήτων δύο παλλόμενων χορδών μπορεί να εκφρασθεί ως ο λόγος δύο ολόκληρων αριθμών. Έτσι δεν μπορεί να εμφανιστεί κάποια ποσότητα η οποία να μην εκφράζεται με ολόκληρους αριθμούς. Ενδεικτική φράση για τα παραπάνω είναι η φράση «αριθμητικός λόγος».

5. Οι πολλαπλάσιοι λόγοι είναι της μορφής mn:n. Οι επιμόριοι λόγοι έχουν τη μορφή (n+1):n. Η γενική μορφή των επιμερών λόγων είναι (n+m):n, όπου το m είναι μεγαλύτερο από το 1 και είτε ισούται με το n, είτε είναι πολλαπλάσιό του.

6. Αυτή η φράση έχει ερμηνευθεί με πολλούς τρόπους. Κατά μια άποψη, η φράση «από αυτούς» αναφέρεται στους λόγους και υπάρχει ένα μονολεκτικό όνομα που αναφέρεται από κοινού στους πολλαπλάσιους και τους επιμόριους λόγους, όμως ο συγγραφέας δεν προσδιορίζει αυτό το όνομα. Κάποιοι, όπως για παράδειγμα ο Πορφύριος, δίνουν την ονομασία «δυνατότερος» ή «καλύτερος», όχι όμως ως τίτλο αλλά ως περιγραφή. Ύστερα ο συγγραφέας περνά αμέσως στις συμφωνίες και τις ασυμφωνίες. «Οι μεν σύμφωνοι φθόγγοι μια κράση (ένα σύνθετο ήχο) οι δυο τους δημιουργούν, οι δε διάφωνοι όχι». Καταλήγει ότι για το λόγο αυτό θα πρέπει να περιμένουμε ότι οι λόγοι των συμφωνιών θα είναι όλοι είτε πολλαπλάσιοι είτε επιμόριοι, λόγω του κοινού χαρακτηριστικού αυτών των δύο κατηγοριών.

Η ασάφεια, η λακωνικότητα και η επιχειρηματολογική αδυναμία του κειμένου προκαλούν τις υποψίες του von Jan. O Barker συμφωνεί με τον von Jan στο σημείο ότι αυτό το κείμενο δεν είναι η δουλειά του σχολαστικού συγγραφέα των προτάσεων. Ωστόσο, αυτό το κείμενο περιέχει, αν και σε ανολοκλήρωτη μορφή, την ουσία του ακόλουθου συμπεράσματος. Λαμβάνεται ρητά ως δεδομένο σε μερικές προτάσεις και, επιπλέον, θα κατέρεε όλο το έργο με την απουσία του.

Ο Barker χαρακτηρίζει ασαφή την εξής πρόταση: «τούτων δὲ οἱ μὲν πολλαπλάσιοι καὶ ἐπιμόριοι ἑνὶ ὀνόματι λέγονται πρὸς ἀλλήλους». Το επιχείρημα για το γεγονός ότι οι συμφωνίες θα πρέπει πάντα να ανήκουν σε μια από αυτές τις δύο κατηγορίες λόγων θα ήταν τότε ότι, από τη στιγμή που οι νότες κάθε συμφωνίας φτιάχνουν μια ενότητα, όλες οι συμφωνίες θα έπρεπε να ανήκουν σε μια και μοναδική κατηγορία λόγων. Ο von Jan παρατηρεί ότι ο συγγραφέας δεν μας λέει ποιο είναι το μοναδικό όνομα της κατηγορίας που περικλείει τα δύο είδη λόγων. Το θέμα, όμως, δεν είναι ουσιαστικά αυτό. Θα μπορούσαμε να υποθέσουμε ότι οι συγκεκριμένοι λόγοι έχουν ένα και μοναδικό όνομα εξαιτίας ενός ιδιαιτέρου κοινού χαρακτηριστικού τους, αλλά ακόμα κι αυτό δεν θα είχε αξία αν δεν υπήρχε ένας τρόπος συσχέτισης του κοινού χαρακτηριστικού των συμφωνιών με το κοινό χαρακτηριστικό των λόγων.

Υπάρχει ένας ακόμη τρόπος να στηρίξει κανείς το επιχείρημα περί ασάφειας σχετικά με τους λόγους. Ο Barker ερμηνεύει την παραπάνω πρόταση ως εξής: «από αυτούς τους αριθμούς, αυτοί που βρίσκονται σε πολλαπλάσιο ή επιμόριο λόγο σχετίζονται μεταξύ τους κάτω από μοναδική ονομασία». Δηλαδή, ενώ στα ελληνικά ένας επιμερής λόγος, όπως το 5:3, μπορεί να προσδιοριστεί μόνο από σύνθετα ονόματα όπως το «πέντε προς τρία», οι πολλαπλάσοι και οι επιμόριοι λόγοι έχουν μια μονολεκτική ονομασία. Όσον αφορά τους πολλαπλάσιους λόγους, αυτοί είναι απλοί και ξεκάθαροι: ο λόγος 2:1 καλείται «διπλάσιος», ο 3:1 «τριπλάσιος» κ.ο.κ. Σχετικά με τους επιμόριους, ο λόγος 3:2 λέγεται «ημιόλιος» και όλοι οι υπόλοιποι ονομάζονται με την πρόθεση «επί» και ένα τακτικό επίθετο, λόγου χάρη ο λόγος 4:3 καλείται «επίτριτος», το 9:8 «επόγδοος» κ.λ.π. Αν αυτό εννοεί στην πραγματικότητα ο συγγραφέας, έτσι εξηγείται αυτό που αποκαλεί ως «μοναδικό όνομα». Δεν υπάρχει ένα και μοναδικό όνομα για όλους τους πολλαπλάσιους και τους επιμόριους λόγους, υπάρχει όμως συγκεκριμένο όνομα για καθέναν από αυτούς. Οι συμφωνίες είναι ενοποιήσεις δύο στοιχείων. Οι λόγοι μερικών κλάσεων «ενοποιούν» τους δύο αριθμούς, οι οποίοι αποτελούν τα στοιχεία τους, σε κάτι ενιαίο, το οποίο προσδιορίζεται από μοναδικό όνομα, αντί να χαρακτηρίζεται από εκφράσεις του τύπου «πέντε προς τρία». Θα περιμέναμε ότι οι λόγοι των συμφωνιών θα είχαν «ενοποιητικά» ονόματα, από τη στιγμή που οι ίδιες οι συμφωνίες μας παρουσιάζονται ως ενοποιήσεις νοτών. Έτσι, θα περιμέναμε οι συμφωνίες να είναι πολλαπλάσιες ή επιμόριες, όχι όμως επιμερείς, κι αυτό γιατί οι επιμερείς λόγοι δεν μπορούν να εκφρασθούν παρά ως σχέσεις μεταξύ ζευγών διακεκριμένων και ανεξάρτητων όρων.

7. Τελικά ο Barker καταλήγει στα εξής συμπεράσματα: α) Η σχέση μεταξύ δύο νοτών που διαφέρουν τονικά εκφράζεται ως λόγος αριθμών, β) δύο νότες που διαφέρουν τονικά αλλά σχηματίζουν μια συμφωνία έχουν μια τέτοια σχέση, ώστε να συνίσταται από αυτές μια μοναδική ενότητα, γ) ο λόγος ανάμεσα στους δύο αριθμούς εκφράζεται ως μια ενότητα, η οποία φέρει μονολεκτικό όνομα, αν και μόνο αν σχηματίζουν πολλαπλάσιο ή επιμόριο λόγο.

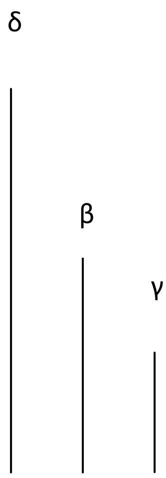
<u>ΠΡΟΤΑΣΗ 1</u>

«Ἐὰν διάστημα πολλαπλάσιον δὶς συντεθὲν ποιῇ τι διάστημα, καὶ αὐτὸ πολλαπλάσιον ἔσται»

«ἔστω διάστημα τὸ ΒΓ, καὶ ἔστω πολλαπλάσιος ὁ Β τοῦ Γ, καὶ γεγενήσθω, ὡς ὁ Γ πρὸς τὸν Β, ὁ Β πρὸς τὸν Δ· φημὶ δὴ τὸν Δ τοῦ Γ πολλαπλάσιον εἶναι. ἐπεὶ γὰρ ὁ Β τοῦ Γ πολλαπλάσιός ἐστι, μετρεῖ ἄρα ὁ Γ τὸν Β. ἦν δὲ καὶ ὡς ὁ Γ πρὸς τὸν Β, ὁ Γ πρὸς τὸν Δ, ὥστε μετρεῖ ὁ Γ καὶ τὸν Δ. πολλαπλάσιος ἄρα ἐστὶν ὁ Δ τοῦ Γ.»

<u>Μετάφραση</u>

Εάν ένα πολλαπλάσιο διάστημα λαμβανόμενο δύο φορές δημιουργεί κάποιο νέο διάστημα, τότε αυτό το νέο διάστημα θα είναι πολλαπλάσιο[8].



Έστω το διάστημα βγ και έστω ότι ο β είναι πολλαπλάσιος του γ. Έστω επίσης ότι έχει ληφθεί ο β προς τον δ με την ίδια σχέση που έχει ο γ προς τον β. Τότε λέγω ότι ο δ είναι πολλαπλάσιος του γ. Διότι , επειδή ο β είναι πολλαπλάσιος του γ, άρα ο γ διαιρεί ακριβώς τον β[9]. Είχε ληφθεί, όμως, ο β προς τον δ με την ίδια σχέση που είχε ο γ προς τον β. Ώστε ο γ διαιρεί ακριβώς και τον δ. Άρα ο δ είναι πολλαπλάσιος του γ.

Με την Άλγεβρα των μουσικών διαστημάτων

Έστω βγ ένα πολλαπλάσιο διάστημα και έστω ότι ο β είναι πολλαπλάσιος του γ. Τότε:

$\beta = \kappa\gamma,\ \ \kappa \in \mathrm{N}$

Έστω επίσης ότι το δ έχει με το β την ίδια σχέση με αυτή που έχει το β με το γ. Τότε:

$\delta = \kappa\beta,\ \ \kappa \in \mathrm{N}$

ΙΣΧΥΡΙΣΜΟΣ: Το δγ είναι πολλαπλάσιο διάστημα, δηλαδή:

$\delta = \lambda\gamma,\ \ \lambda \in \mathrm{N}$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ ΙΣΧΥΡΙΣΜΟΥ:

$\left.\begin{array}{l}\beta = \kappa\gamma \\ \delta = \kappa\beta\end{array}\right\} \Rightarrow \delta = \kappa(\kappa\gamma) \Rightarrow \delta = \kappa^2\gamma$ και αφού $\kappa \in \mathrm{N} \Rightarrow \kappa^2 \in \mathrm{N} \Rightarrow \kappa^2 = \dfrac{\delta}{\gamma} = \lambda \in \mathrm{N}$,

τελικά $\delta = \lambda\gamma,\ \ \lambda \in \mathrm{N}$.

ΣΧΟΛΙΑ

8. Όπως έχει ήδη αναφερθεί, οι πρώτες εννιά προτάσεις δεν εισάγουν μουσικά δεδομένα και θεωρούνται καθαρά μαθηματικές. Έτσι, η έκφραση «διάστημα» δεν θα πρέπει να εκλαμβάνεται εδώ ως μουσικός όρος, αλλά δηλώνει την «απόσταση», τον «χωρισμό» και εφαρμόζεται εξίσου σε σχέσεις μεταξύ δύο μηκών ή δύο αριθμών (Barker).

Τα παρακάτω σχόλια φέρουν την υπογραφή του Χ. Σπυρίδη:

Σύμφωνα με τον Νικόμαχο, «διάστημα δ' ἐστὶ δυοῖν φθόγγων μεταξύτης», δηλαδή [διάστημα είναι ό,τι υπάρχει ανάμεσα σε δύο φθόγγους].

Ένας «Ανώνυμος» συγγραφέας στο *«De Musica Scripta Bellermanniana»* λέει: «διάστημα δ' ἐστὶ τὸ περιεχόμενον ὑπὸ δύο φθόγγων ἀνομοίων τῇ τάσει, τοῦ μὲν ὀξυτέρου, τοῦ δὲ βαρυτέρου», δηλαδή [διάστημα είναι εκείνο που περιλαμβάνεται ανάμεσα σε [ή περικλείεται από] δύο νότες διαφορετικές στο ύψος, από τις οποίες η μία είναι ψηλότερη και η άλλη χαμηλότερη].

Ο Κλεονείδης στο *«Introductio Harmonica»* δίνει τον εξής ορισμό για το διάστημα: «διάστημα δὲ τὸ περιεχόμενον ὑπὸ δύο φθόγγων ἀνομοίων ὀξύτητι καὶ βαρύτητι», δηλαδή [διάστημα είναι η απόσταση που περιλαμβάνεται ανάμεσα σε δύο νότες διαφορετικές στο ύψος και στο βάθος]

Αξίζει να γίνει αναφορά στη διάκριση των διαστημάτων σε «άρτια» και «περιττά», η οποία γινόταν ανάλογα με τον αριθμό των διέσεων που περιελάμβαναν. Λόγου χάρη, το ημιτόνιο και ο τόνος ήταν άρτια, γιατί περιείχαν δύο και τέσσερις διέσεις αντίστοιχα (κάθε δίεση είναι ίση προς ένα τέταρτο του τόνου), ενώ το διάστημα ανάμεσα στην παρυπάτη και τη λιχανό (τρία τέταρτα του τόνου) ήταν περιττό, γιατί περιείχε τρεις διέσεις.

Μια και αναφερθήκαμε στον όρο «δίεση», ας μιλήσουμε λεπτομερέστερα γι' αυτόν. Κατ' αρχήν, ο όρος αυτός προέρχεται από το ρήμα «δίημι», που σημαίνει διαπερνώ, αφήνω κάτι να περάσει. Επομένως, δίεση σημαίνει τη διέλευση, τη διαβίβαση. Στη μουσική ήταν όρος με πολλές σημασίες. Για πολλούς θεωρητικούς σήμαινε το ένα τέταρτο του τόνου και ονομαζόταν «δίεσις τεταρτημόριος».

Ο Θέων ο Σμηρναίος λέει ότι δίεση είναι, σύμφωνα με τη σχολή του Αριστόξενου, το τέταρτο του τόνου, ενώ για τους Πυθαγορείους δίεση ονομαζόταν το ημιτόνιο.

Ο Αριστόξενος στο *«Elementa Harmonica»*, αναφέρει ότι «οὔτε γὰρ ἡ φωνὴ διέσεως τῆς ἐλαχίστης ἔλαττον ἔτι διάστημα δύναται διασαφεῖν οὐδ' ἡ ἀκοὴ διαισθάνεσθαι», δηλαδή [η φωνή δεν μπορεί να διακρίνει, ούτε η ακοή να ξεχωρίσει, οποιοδήποτε διάστημα μικρότερο από την πιο μικρή δίεση]. Αυτό σημαίνει ότι, κατά τον Αριστόξενο, δίεση είναι το ελάχιστο διάστημα που μπορεί να εκτελέσει η φωνή και να συλλάβει το αυτί.

Ο Αριστείδης στο *«De Musica»* λέει ότι «δίεση ήταν το ελάχιστο διάστημα της φωνής».

Ο Νικόμαχος στο *«Harmonicum Enchiridion»* αναφέρει ότι: «δίεσις, ὅπερ ἐστὶν ἡμιτονίου ἥμισυ», δηλαδή ότι [η εναρμόνιος δίεση είναι το μισό του ημιτονίου], ενώ ο Γαυδέντιος αναφέρει ότι [η εναρμόνιος δίεση είναι το τέταρτο του τόνου]. Κατά τον τελευταίο, η ελάχιστη χρωματική δίεση (η δίεση που χρησιμοποιείται στο χρωματικό γένος) ισούται με 1/3 του τόνου (δίεσις τριτημόριος). Η «ημιόλιος δίεσις» είναι η δίεση που χρησιμοποιείται στο ημιόλιο χρωματικό γένος και είναι ίση με μια και μισή εναρμόνια δίεση. Οπότε, αφού η εναρμόνια δίεση είναι 1/4 του τόνου, η ημιόλια θα είναι 1/4 + 1/8 = 3/8 του τόνου.

Ο δε Κλεονείδης λέει: «Ας υποθέσουμε πως ο τόνος διαιρείται σε δώδεκα ελάχιστα μόρια, το καθένα από τα οποία ονομάζεται δωδεκατημόριο (1/12)... το ημιτόνιο θα είναι 6/12 και η δίεση, η λεγόμενη «τεταρτημόριος» (ένα τέταρτο του τόνου) θα έχει 3/12 και η «τριτημόριος» (ένα τρίτο του τόνου) θα έχει 4/12».

Όσον αφορά τον όρο «γένος», ισχύουν τα παρακάτω:

Γένος : Όρος που σήμαινε τη διάφορη διάταξη των διαστημάτων στη σύσταση ενός τετραχόρδου ή ενός πιο μεγάλου διαστήματος, του οποίου το τετράχορδο είναι συστατικό μέρος. Κατά τον Αριστείδη Κοϊντιλιανό: «Γένος είναι κάποια διαίρεση του τετραχόρδου». Ο Κλεονείδης υποστηρίζει ότι: «Γένος είναι κάποια διαίρεση τεσσάρων φθόγγων».

Τα γένη ήταν τρία: το «διατονικόν ή διάτονον», το «χρωματικόν ή χρώμα» και το «εναρμόνιον ή αρμονία». Το διατονικό ήταν το πρώτο που χρησιμοποιήθηκε, θεωρούνταν το πιο φυσικό και μπορούσε να τραγουδηθεί ακόμη κι από εκείνους που ήταν εντελώς απαίδευτοι. Στο γένος αυτό, γινόταν χρήση τόνων και ημιτονίων. Το δε όνομα αυτού προέρχεται από το ρήμα διατείνω (τεντώνω). Το χρωματικό γένος χρησιμοποιήθηκε αργότερα και θεωρούνταν το πιο τεχνικό [τεχνικώτατον] και μπορούσε να εκτελεστεί μόνο από μουσικά καλλιεργημένους ανθρώπους. Χαρακτηριστικό συστατικό στοιχείο του χρωματικού γένους ήταν το διάστημα ενός τόνου και μισού. Το εναρμόνιο γένος ήταν το τελευταίο που χρησιμοποιήθηκε. Θεωρούνταν εξαιρετικά δύσκολο, χρειαζόταν σημαντική πρακτική εξάσκηση και ήταν σχεδόν αδύνατο για τους πολλούς. Σε αυτό το γένος, γινόταν χρήση τετάρτων του τόνου.

9. Δηλαδή το μήκος του β μπορεί να διαιρεθεί, ή να μετρηθεί, κατά έναν ολόκληρο αριθμό φορών από το μήκος του γ. Αλλιώς, αν ο β και ο γ θεωρηθούν αριθμοί, τότε ο γ είναι παράγοντας του β.

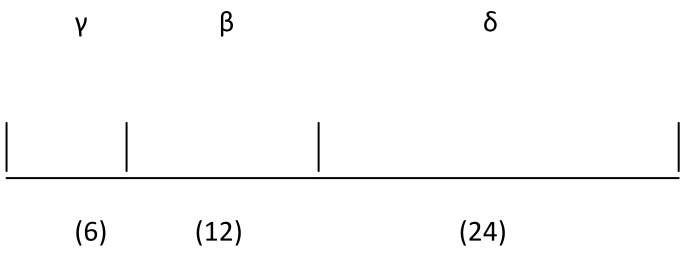
ΠΡΟΤΑΣΗ 2

«Ἐὰν διάστημα δὶς συντεθὲν τὸ ὅλον ποιῇ πολλαπλάσιον, καὶ αὐτὸ ἔσται πολλαπλάσιον.»

«ἔστω διάστημα τὸ ΒΓ, καὶ γεγενήσθω, ὡς ὁ Γ πρὸς τὸν Β, οὕτως ὁ Β πρὸς τὸν Δ, καὶ ἔστω ὁ Δ τοῦ Γ πολλαπλάσιος· φημὶ καὶ τὸν Β τοῦ Γ εἶναι πολλαπλάσιον. ἐπεὶ γὰρ ὁ Δ τοῦ Γ πολλαπλάσιός ἐστι, μετρεῖ ἄρα ὁ Γ τὸν Δ. ἐμάθομεν δέ, ὅτι, ἐὰν ὦσιν ἀριθμοὶ ἀνάλογον ὁποσοιοῦν, ὁ δὲ πρῶτος τὸν ἔσχατον μετρῇ, καὶ τοὺς μεταξὺ μετρήσει. μετρεῖ ἄρα ὁ Γ τὸν Β· πολλαπλάσιος ἄρα ὁ Β τοῦ Γ.»

Μετάφραση

Εάν ένα διάστημα, λαμβανόμενο δύο φορές, δημιουργεί ένα ολικό διάστημα πολλαπλάσιο, τότε και αυτό το (αρχικό) διάστημα θα είναι πολλαπλάσιο.



Έστω το διάστημα βγ (εννοεί μια σχέση μεταξύ των δύο ευθυγράμμων τμημάτων β και γ) και ας ληφθεί ο β προς τον δ με την ίδια σχέση που έχει ο γ προς τον β και έστω ότι ο δ είναι πολλαπλάσιος του γ. Ισχυρίζομαι ότι και ο β είναι πολλαπλάσιος του γ διότι, επειδή ο δ είναι πολλαπλάσιος του γ, συμπεραίνουμε ότι ο γ διαιρεί ακριβώς τον δ. Μάθαμε[10], όμως, ότι εάν υπάρχουν οσοιδήποτε αριθμοί σε αναλογία στην οποία ο πρώτος (αριθμός [εννοεί τον πρώτο «άκρο» όρο της αναλογίας]) διαιρεί ακριβώς τον τελευταίο (αριθμό [εννοεί τον τελευταίο «άκρο» όρο της αναλογίας]), τότε θα διαιρεί ακριβώς και (όλους) τους ενδιάμεσους αριθμούς (εννοεί τους «μέσους» όρους της αναλογίας). Άρα ο γ διαιρεί ακριβώς τον β και, κατά συνέπεια, ο β είναι πολλαπλάσιος του γ.

<u>Αλγεβρική απόδειξη (Χ. Σπυρίδης)</u>

Έστω η αναλογία

$$\frac{\gamma}{\beta} = \frac{\beta}{\delta} = \lambda, \ \ \lambda \in \mathrm{N}$$

και έστω ότι ο δ είναι πολλαπλάσιος του γ, οπότε:

$$\delta = \kappa\gamma, \ \ \kappa \in \mathrm{N}$$

$$\left.\begin{matrix} \beta = \lambda\delta \\ \delta = \kappa\gamma \end{matrix}\right\} \Rightarrow \beta = \lambda\kappa\gamma \Rightarrow \frac{\beta}{\gamma} = \lambda\kappa, \ \ \lambda\kappa \in \mathrm{N}$$

Άρα ο γ διαιρεί ακριβώς τον β, οπότε ο β είναι πολλαπλάσιος του γ.

<u>*ΣΧΟΛΙΑ* (Χ. Σπυρίδης)</u>

10. Στο βιβλίο VIII των *«Στοιχείων»* του Ευκλείδη

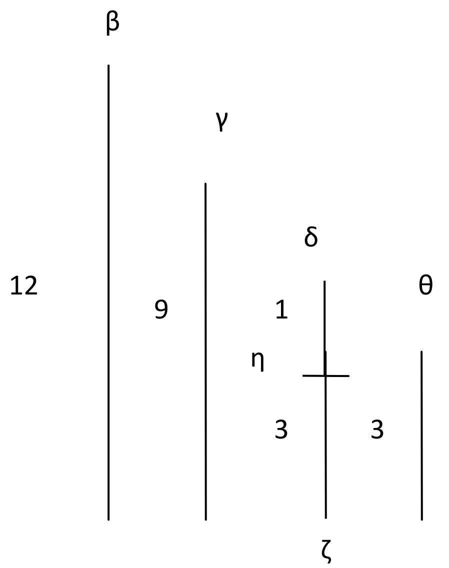
ΠΡΟΤΑΣΗ 3

«Ἐπιμορίου διαστήματος οὐδεὶς μέσος, οὔτε εἷς οὔτε πλείους, ἀνάλογον ἐμπεσεῖται ἀριθμός.»

«ἔστω γὰρ ἐπιμόριον διάστημα τὸ ΒΓ· ἐλάχιστοι δὲ ἐν τῷ αὐτῷ λόγῳ τοῖς Β, Γ ἔστωσαν οἱ ΔΖ, Θ. οὗτοι οὖν ὑπὸ μονάδος μόνης μετροῦνται κοινοῦ μέτρου. ἄφελε ἴσον τῷ Θ τὸν ΗΖ καὶ ἐπεὶ ἐπιμόριός ἐστιν ὁ ΔΖ τοῦ Θ, ἡ ὑπεροχὴ ὁ ΔΗ κοινὸν μέτρον τοῦ τε ΔΖ καὶ τοῦ Θ ἐστι· μονὰς ἄρα ὁ ΔΗ· οὐκ ἄρα ἐμπεσεῖται εἰς τοὺς ΔΖ, Θ μέσος οὐδείς. ἔσται γὰρ ὁ ἐμπίπτων τοῦ ΔΖ ἐλάττων, τοῦ δὲ Θ μείζων, ὥστε τὴν μονάδα διαιρεῖσθαι, ὅπερ ἀδύνατον. οὐκ ἄρα ἐμπεσεῖται εἰς τοὺς ΔΖ, Θ τις. ὅσοι δὲ εἰς τοὺς ἐλαχίστους μέσοι ἀνάλογον ἐμπίπτουσι, τοσοῦτοι καὶ εἰς τοὺς τὸν αὐτὸν λόγον ἔχοντας ἀνάλογον ἐμπεσοῦνται. οὐδεὶς δὲ εἰς τοὺς ΔΖ, Θ ἐμπεσεῖται, οὐδὲ εἰς τοὺς Β, Γ ἐμπεσεῖται.»

Μετάφραση

Σε επιμόριο διάστημα κανένας μέσος ανάλογος, ούτε ένας ούτε περισσότεροι μέσοι ανάλογοι αριθμοί παρεμβάλλονται.



Έστω το επιμόριο διάστημα βγ. Οι ελάχιστοι αριθμοί[11] που έχουν τον ίδιο λόγο με τους βγ έστω ότι είναι οι δζ, θ. Αυτοί, λοιπόν, οι αριθμοί έχουν ως μόνον κοινό διαιρέτη τη μονάδα. Αφαίρεσε τον ηζ, που είναι ίσος προς τον θ. Και, επειδή ο δζ είναι επιμόριος του θ, η διαφορά δη αποτελεί κοινό διαιρέτη και του δζ και του θ. Συνεπώς, ο δη είναι ίσος με τη μονάδα. Άρα, λοιπόν, στους αριθμούς δζ, θ δεν μπορεί να παρεμβληθεί κανένας μέσος (ανάλογος αριθμός). Διότι (στην ενάντια περίπτωση) ο παρεμβαλλόμενος (μέσος ανάλογος αριθμός) θα πρέπει να είναι μικρότερος από το δζ και μεγαλύτερος από το θ, με αποτέλεσμα να υποδιαιρείται η μονάδα[12]. Γεγονός αδύνατο. Συνεπώς, δεν παρεμβάλλεται στους αριθμούς δζ, θ κάποιος αριθμός. Όσοι δε μέσοι ανάλογοι παρεμβάλλονται στους ελάχιστους αριθμούς, τόσοι (σε πλήθος) μέσοι ανάλογοι παρεμβάλλονται και στους αριθμούς, που έχουν τον ίδιο λόγο μ’ αυτούς[13]. Αφού κανένας (μέσος ανάλογος) δεν παρεμβάλλεται στους δζ, θ, κανένας (μέσος ανάλογος) δεν παρεμβάλλεται και στους (αριθμούς) β,γ.

Απόδειξη με βάση τον ορισμό του «επιμορίου αριθμού» (Χ. Σπυρίδης)

Έχουμε ότι:

$$\beta : \gamma = (n+1) : n$$
$$\delta\zeta : \theta = (n+1) : n$$

Με βάση την Πρόταση 19 του Ευκλείδη περί συγκρίσεως λόγων ισχύει: $\frac{\delta\zeta - \theta}{\theta} = \frac{n+1-n}{n} \Rightarrow \frac{\delta\zeta - \theta}{\theta} = \frac{1}{n} \Rightarrow \frac{\eta\delta}{\theta} = \frac{1}{n}$

Έστω τώρα ότι υπάρχει κάποιος μέσος ανάλογος αριθμός, ο x, τέτοιος ώστε:

$$\theta < x < \delta\zeta$$

$$\frac{x}{\theta} = \frac{n+1}{n}$$

Επειδή, όμως, ισχύει ότι:

$$\frac{\delta\zeta}{\theta} = \frac{n+1}{n}$$

προκύπτει ότι

$$x = \delta\zeta$$

ΑΤΟΠΟ.

Μια άτυπη εναλλακτική απόδειξη (Χ. Σπυρίδης)

Έστω β και γ οι μικρότεροι ακέραιοι που βρίσκονται σε επιμόριο λόγο. Τότε:

$$\beta - \gamma = 1$$

και οι β και γ είναι διαδοχικοί ακέραιοι. Έστω τώρα ότι υπάρχει μέσος ανάλογος αριθμός, ο x, μεταξύ τους. Τότε:

$$\beta : x = x : \gamma$$

$$\frac{\beta}{x} = \frac{x}{\gamma}$$

Έτσι:

$x^2 = \beta \cdot \gamma$

Οπότε ο x είναι το γινόμενο των τετραγωνικών ριζών του β και του γ. Δηλαδή και ο β και ο γ θα πρέπει να έχουν ρητή τετραγωνική ρίζα, ΑΤΟΠΟ γιατί δεν υπάρχουν διαδοχικοί ακέραιοι αριθμοί που να έχουν κι οι δύο ρητές τετραγωνικές ρίζες.

ΣΧΟΛΙΑ (Χ. Σπυρίδης)

11. Στο σημείο αυτό ο Ευκλείδης υπονοεί την «απλοποίηση» των όρων του λόγου, ώστε να προκύψει λόγος «ανάγωγος» (όρος ο οποίος δημιουργήθηκε από τον Χαράλαμπο Σπυρίδη, έχοντας κατά νου τον όρο «ανάγωγο κλάσμα»).

Δηλαδή, εάν είναι

$\beta = \lambda \cdot \delta\zeta$

$\gamma = \lambda \cdot \theta,\ \lambda \in \mathrm{N} \Rightarrow \lambda \cdot \delta\zeta : \lambda \cdot \theta = \delta\zeta : \theta$, σύμφωνα με την Πρόταση 15 από το βιβλίο V των *«Στοιχείων»*, το οποίο περιλαμβάνει τη θεωρία των λόγων και των αναλογιών. Εφαρμογή αυτών έχουμε στα μήκη των ευθυγράμμων τμημάτων που δίνονται από τον Ευκλείδη. Πράγματι:

$$\frac{\beta}{\gamma} = \frac{12}{9} = \frac{3 \cdot 4}{3 \cdot 3} = \frac{3}{3} \cdot \frac{3+1}{3} = \frac{3+1}{3}$$

Οι αριθμοί 3+1 και 3 καλούνται «ελάχιστοι εν τω αυτώ λόγω τοις αριθμοίς 12 και 9».

12. Ο Ευκλείδης και όλοι οι Έλληνες μαθηματικοί δεν θεωρούν το λόγο δύο μεγεθών ως αριθμό, διότι αριθμούς θεωρούσαν μόνο τους ακεραίους (το σύνολο N των σημερινών φυσικών αριθμών), ενώ ο λόγος μπορεί να είναι και κλασματικός και ασύμμετρος. Αφού, λοιπόν, ο μικρότερος «αριθμός» γι' αυτούς είναι η μονάδα, δεν μπορεί να προκύψει άλλος «αριθμός» με την υποδιαίρεση της μονάδας.

14. Η απόδειξη βρίσκεται στο βιβλίο VIII των *«Στοιχείων»*

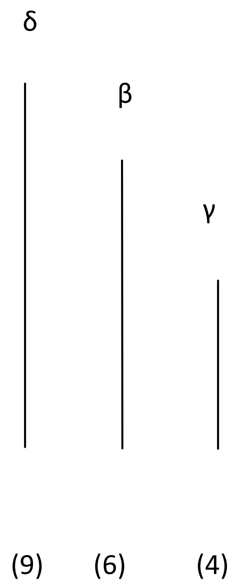
ΠΡΟΤΑΣΗ 4

«Ἐὰν διάστημα μὴ πολλαπλάσιον δὶς συντεθῇ, τὸ ὅλον οὔτε πολλαπλάσιον ἔσται οὔτε ἐπιμόριον.»

«ἔστω γὰρ διάστημα μὴ πολλαπλάσιον τὸ ΒΓ, καὶ γεγενήσθω, ὡς ὁ Γ πρὸς τὸν Β, ὁ Β πρὸς τὸν Δ· λέγω, ὅτι ὁ Δ τοῦ Γ οὔτε πολλαπλάσιος οὔτε ἐπιμόριός ἐστιν. ἔστω γὰρ πρῶτον ὁ Δ τοῦ Γ πολλαπλάσιος. οὐκοῦν ἐμάθομεν, ὅτι, ἐὰν διάστημα δὶς συντεθὲν τὸ ὅλον ποιῇ πολλαπλάσιον, καὶ αὐτὸ πολλαπλάσιόν ἐστιν. ἔσται ἄρα ὁ Β τοῦ Γ πολλαπλάσιος. οὐκ ἦν δέ. ἀδύνατον ἄρα τὸν Δ τοῦ Γ εἶναι πολλαπλάσιον. ἀλλὰ μὴν οὐδ' ἐπιμόριον. ἐπιμορίου γὰρ διαστήματος μέσος οὐδεὶς ἀνάλογον ἐμπίπτει. εἰς δὲ τοὺς Δ, Γ ἐμπίπτει ὁ Β. ἀδύνατον ἄρα τὸν Δ τοῦ Γ ἢ πολλαπλάσιον ἢ ἐπιμόριον εἶναι»

<u>Μετάφραση</u>

Εάν ένα μη πολλαπλάσιο διάστημα ληφθεί δύο φορές, το ολικό (διάστημα που σχηματίζεται) δεν θα είναι ούτε πολλαπλάσιο ούτε επιμόριο.



Έστω το βγ ένα διάστημα μη πολλαπλάσιο και έστω ότι έχει ληφθεί ο β προς τον δ να έχει την ίδια σχέση, που έχει ο γ προς τον β. Ισχυρίζομαι (λέγω) ότι ο δ δεν είναι ούτε πολλαπλάσιος ούτε επιμόριος του γ.

Διότι έστω κατά πρώτον ότι είναι ο δ πολλαπλάσιος του γ. Μάθαμε, όμως, ότι εάν ένα διάστημα συντιθέμενο δύο φορές δημιουργεί ολικό διάστημα πολλαπλάσιο, τότε και αυτό (το αρχικό διάστημα) θα είναι πολλαπλάσιο[14]. Κατά συνέπεια ο β θα είναι πολλαπλάσιος του γ, που δεν ήταν. Άρα είναι αδύνατον ο δ να είναι πολλαπλάσιος του γ. Αλλά ούτε επιμόριος θα μπορούσε να είναι. Διότι σε επιμόριο διάστημα κανένας μέσος ανόλογος (αριθμός) δεν παρεμβάλλεται16, ενώ στους δγ παρεμβάλλεται ο β. Άρα είναι αδύνατον ο δ να είναι είτε πολλαπλάσιος είτε επιμόριος του γ.

<u>ΣΧΟΛΙΑ</u> <u>(Χ. Σπυρίδης)</u>

14. Από την Πρόταση 2

15. Από την Πρόταση 3

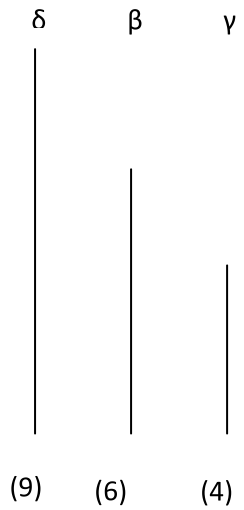
ΠΡΟΤΑΣΗ 5

«Ἐὰν διάστημα δὶς συντεθὲν τὸ ὅλον μὴ ποιῇ πολλαπλάσιον, οὐδ' αὐτὸ ἔσται πολλαπλάσιον.»

«ἔστω γὰρ διάστημα τὸ ΒΓ, καὶ γεγενήσθω ὡς ὁ Γ πρὸς τὸν Β, ὁ Β πρὸς τὸν Δ, καὶ μὴ ἔστω ὁ Δ τοῦ Γ πολλαπλάσιος· λέγω, ὅτι οὐδὲ ὁ Β τοῦ Γ ἔσται πολλαπλάσιος. εἰ γάρ ἐστιν ὁ Β τοῦ Γ πολλαπλάσιος, ἔσται ἄρα ὁ Δ τοῦ Γ πολλαπλάσιος. οὐκ ἔστι δέ. οὐκ ἄρα ὁ Β τοῦ Γ ἔσται πολλαπλάσιος.»

Μετάφραση

Εάν ένα διάστημα, που προστιθέμενο δύο φορές δεν δημιουργεί ολικό (διάστημα) πολλαπλάσιο, ούτε και αυτό (το αρχικό διάστημα) θα είναι πολλαπλάσιο.



Διότι έστω το διάστημα βγ και έστω ότι έχει ληφθεί ο β προς τον δ με την ίδια σχέση που έχει ληφθεί ο γ προς τον β και έστω ότι ο δ δεν είναι πολλαπλάσιος του γ. Ισχυρίζομαι (λέγω) ότι ούτε ο β θα είναι πολλαπλάσιος του γ.

Διότι, εάν είναι ο β πολλαπλάσιος του γ, θα είναι ο δ πολλαπλάσιος του γ. Δεν είναι, όμως. Άρα, λοιπόν, ο β δεν είναι πολλαπλάσιος του γ.

ΠΡΟΤΑΣΗ 6

«Τὸ διπλάσιον διάστημα ἐκ δύο τῶν μεγίστων ἐπιμορίων συνέστηκεν, ἔκ τε τοῦ ἡμιολίου καὶ ἐκ τοῦ ἐπιτρίτου.»

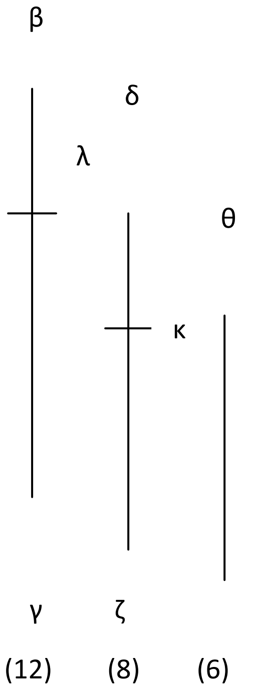
«ἔστω γὰρ ὁ μὲν ΒΓ τοῦ ΔΖ ἡμιόλιος, ὁ δὲ ΔΖ τοῦ Θ ἐπίτριτος· φημὶ τὸν ΒΓ τοῦ Θ διπλάσιον εἶναι. ἀφεῖλον γὰρ ἴσον τῷ Θ τὸν ΖΚ καὶ τῷ ΔΖ τὸν ΓΛ. οὐκοῦν ἐπεὶ ὁ ΒΓ τοῦ ΔΖ ἡμιόλιος, ὁ ΒΛ ἄρα τοῦ ΒΓ τρίτον μέρος ἐστίν, τοῦ δὲ ΔΖ ἥμισυ. πάλιν ἐπεὶ ὁ ΔΖ τοῦ Θ ἐπίτριτός ἐστιν, ὁ ΔΚ τοῦ μὲν ΔΖ τεταρτημόριον, τοῦ δὲ Θ τριτημόριον. οὐκοῦν ἐπεὶ ὁ ΔΚ τοῦ ΔΖ ἐστι τεταρτημόριον, ὁ δὲ ΒΛ τοῦ ΔΖ ἥμισυ, τοῦ ἄρα ΒΛ ἥμισυ ἔσται ὁ ΔΚ. ἦν δὲ ὁ ΒΛ τοῦ ΒΓ τρίτον μέρος·

ὁ ἄρα ΔΚ τοῦ ΒΓ ἕκτον μέρος ἐστίν. ἦν δὲ ὁ ΔΚ τοῦ Θ τρίτον μέρος· ὁ ἄρα ΒΓ τοῦ Θ διπλάσιός ἐστιν.

῎Αλλως. ῎Εστω γὰρ ὁ μὲν Α τοῦ Β ἡμιόλιος, ὁ δὲ Β τοῦ Γ ἐπίτριτος· λέγω, ὅτι ὁ Α τοῦ Γ ἐστι διπλάσιος. Ἐπεὶ γὰρ ἡμιόλιός ἐστιν ὁ Α τοῦ Β, ὁ Α ἄρα ἔχει τὸν Β καὶ τὸ ἥμισυ αὐτοῦ. δύο ἄρα οἱ Α ἴσοι εἰσὶ τρισὶ τοῖς Β. πάλιν ἐπεὶ ὁ Β τοῦ Γ ἐστιν ἐπίτριτος, ὁ Β ἄρα ἔχει τὸν Γ καὶ τὸ τρίτον αὐτοῦ. τρεῖς ἄρα οἱ Β ἴσοι εἰσὶ τέτταρσι τοῖς Γ. τρεῖς δὲ οἱ Β ἴσοι εἰσὶ δυσὶ τοῖς Α. δύο ἄρα οἱ Α ἴσοι εἰσὶ τέτταρσι τοῖς Γ. ὁ ἄρα Α ἴσος ἐστὶ δυσὶ τοῖς Γ· διπλάσιος ἄρα ἐστὶν ὁ Α τοῦ Γ»

Μετάφραση

Το διπλάσιο διάστημα[16] έχει συντεθεί από τα δύο μέγιστα επιμόρια διαστήματα, αυτό του ημιολίου και αυτό του επίτριτου.



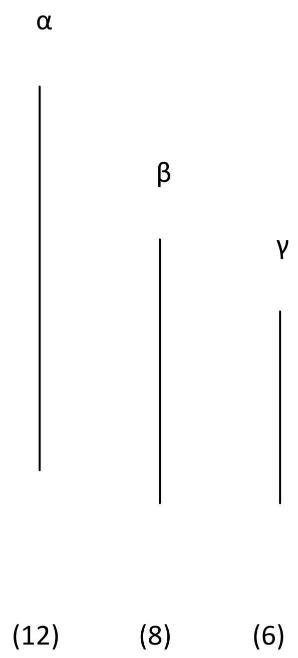
Διότι έστω ότι ο μεν βγ είναι ημιόλιος του δζ, ο δε δζ είναι επίτριτος του θ. Ισχυρίζομαι (λέγω) ότι ο βγ είναι διπλάσιος του θ.

Διότι αφήρεσα τους ζκ, που είναι ίσος προς τον θ, και τον γλ, που είναι ίσος προς τον δζ.

Επειδή, λοιπόν, ο βγ είναι ημιόλιος του δζ, ο βλ, συνεπώς, θα είναι το $\frac{1}{3}$ του βγ (καθώς επίσης θα είναι) το $\frac{1}{2}$ του δζ. Πάλι, επειδή ο δζ είναι επίτριτος του θ, ο δκ θα είναι, αφενός μεν το $\frac{1}{4}$ του δζ, αφετέρου δε το $\frac{1}{3}$ του θ.

Επειδή, λοιπόν, ο δκ είναι το $\frac{1}{4}$ του δζ, ο δε βλ το $\frac{1}{2}$ του δζ, κατά συνέπεια ο δκ θα είναι το $\frac{1}{2}$ του βλ. Ήταν, όμως, ο βλ το $\frac{1}{3}$ του βγ. Συνεπώς, ο δκ είναι το $\frac{1}{6}$ του βγ. Ήταν δε ο δκ το $\frac{1}{3}$ του θ. Άρα ο βγ είναι διπλάσιος του θ[17].

Απόδειξη με άλλον τρόπο (Χ. Σπυρίδης):



Έστω, λοιπόν, ο μεν α ημιόλιος του β, ο α, κατά συνέπειαν, θα εμπεριέχει τον β και το $\frac{1}{2}$ του β. Άρα δύο φορές ο α θα ισούται με τρεις φορές τον β. Πάλι, επειδή ο β είναι επίτριτος του γ, ο β, συνεπώς, εμπεριέχει τον γ και το $\frac{1}{3}$ του γ. Άρα τρεις φορές ο β ισούται με τέσσερις φορές τον γ. Άρα ο α είναι ίσος με δύο φορές τον γ. Άρα ο α είναι διπλάσιος του γ [19,20].

ΣΧΟΛΙΑ (Χ. Σπυρίδης)

16. Διπλάσιο διάστημα είναι η διαπασών (ή δια πασών των χορδών συμφωνία), δηλαδή η οκτάβα. Κατά τον Βακχείο, την διαπασών φανερώνουν (δείχνουν) ο προσλαμβανόμενος και η μέση [δηλαδή η 8η], ενώ για τον Αριστοτέλη η ογδόη ήταν η πιο τέλεια συμφωνία. Με τον τελευταίο συμφωνεί και ο Πτολεμαίος, ο οποίος θεωρεί το διάστημα της ογδόης το πιο ωραίο και πιο ενωτικό. Ας σημειωθεί, επίσης, ότι ο όρος «διαπασών» αντικατέστησε, μετά την εποχή του Αριστόξενου, τον όρο «αρμονία». Ο Νικόμαχος γράφει: «ἆοἱ παλαιότατοι ἀπεφαίνοντο, ἁρμονίαν μὲν καλοῦντες τὴν διὰ πασῶνή», δηλαδή «την διαπασών την ονόμαζαν οι παλαιότεροι αρμονία».

17. Παρακάτω δίνεται η πρώτη απόδειξη με μαθηματικά σύμβολα:

Έστω κζ=θ και γλ=δζ

Αφού βγ ημιόλιος του δζ τότε:

$$\frac{\beta\gamma}{\delta\zeta}=\frac{3}{2}\Rightarrow\frac{\beta\gamma-\delta\zeta}{\delta\zeta}=\frac{3-2}{2}=\frac{1}{2}\Rightarrow\frac{\beta\lambda}{\delta\zeta}=\frac{1}{2}\Rightarrow\beta\lambda=\frac{1}{2}\delta\zeta\,(\mathrm{I})$$

$$\frac{\beta\gamma}{\delta\zeta}=\frac{3}{2}\Rightarrow\delta\zeta=\frac{2}{3}\beta\gamma\Rightarrow\beta\gamma-\beta\lambda=\frac{2\beta\gamma}{3}\Rightarrow\beta\lambda=\beta\gamma-\frac{2\beta\gamma}{3}\Rightarrow\beta\lambda=\frac{1}{3}\beta\gamma(\mathrm{II})$$

Αφού δζ επίτριτος του θ τότε:

$$\frac{\delta\zeta}{\theta}=\frac{4}{3}\Rightarrow\frac{\delta\zeta-\theta}{\theta}=\frac{4-3}{3}\Rightarrow\frac{\delta\kappa}{\theta}=\frac{1}{3}\Rightarrow\delta\kappa=\frac{1}{3}\theta(\mathrm{III})$$
$$\frac{\delta\zeta}{\theta}=\frac{4}{3}\Rightarrow\theta=\frac{3}{4}\delta\zeta\Rightarrow\delta\zeta-\delta\kappa=\frac{3}{4}\delta\zeta\Rightarrow\delta\kappa=\delta\zeta-\frac{3}{4}\delta\zeta\Rightarrow\delta\kappa=\frac{1}{4}\delta\zeta\,(\mathrm{IV})$$

Από (I), (IV) έχουμε ότι:

$$\delta\kappa=\frac{1}{2}\beta\lambda\,(V)$$

Από (II), (V) έχουμε ότι:

$$\delta\kappa=\frac{1}{6}\beta\gamma(VI)$$

Από (III), (VI) έχουμε ότι:

$$\beta\gamma=2\theta$$

18. Ομοίως και για τη δεύτερη απόδειξη:

α ημιόλιος του β

$$\Rightarrow\alpha=\beta+\frac{1}{2}\beta\Rightarrow\alpha=\frac{3}{2}\beta\Rightarrow2\alpha=3\beta\,(I)$$

β επίτριτος του γ

$$\Rightarrow\beta=\gamma+\frac{1}{3}\gamma\Rightarrow\beta=\frac{4}{3}\gamma\Rightarrow3\beta=4\gamma\quad\text{(II)}$$

Από (I) και (II) έχουμε ότι:

$$2\alpha=4\gamma\Rightarrow\alpha=2\gamma$$

Άρα ο α είναι διπλάσιος του γ.

19. Στο σημείο αυτό ο Πορφύριος προσθέτει μία ακόμη πρόταση:

«Κανένας πολλαπλάσιος λόγος δεν φτιάχνεται από επιμόριους λόγους, εκτός από το λόγο δύο».

Απόδειξη: Έστω ότι υπάρχει πολλαπλάσιος λόγος αγ, ο οποίος φτιάχνεται από τους επιμόριους λόγους αβ και βγ. Έστω, επίσης, ότι ο δ είναι ημιόλιος του ε και ε ο επίτριτος του ζ, τότε ο δ είναι διπλάσιος του ζ. Αφού ο ημιόλιος λόγος είναι ο μεγαλύτερος από τους επιμόριους και ο επίτριτος είναι ο δεύτερος, τότε είτε ο ένας από τους λόγους δε και εζ ισούται με έναν από τους λόγους αβ και βγ, είτε ο ένας ή και οι δύο από τους δε και εζ είναι μεγαλύτεροι από έναν ή και τους δύο από τους αβ και βγ. Όμως, σε κάθε περίπτωση, ο λόγος δζ είναι μεγαλύτερος από το λόγο αγ, ΑΤΟΠΟ, γιατί ο διπλός είναι ο μικρότερος από όλους τους πολλαπλάσιους λόγους. Άρα, δεν υπάρχει πολλαπλάσιος λόγος που να αποτελείται από δύο επιμόριους λόγους, εκτός από το λόγο δύο.

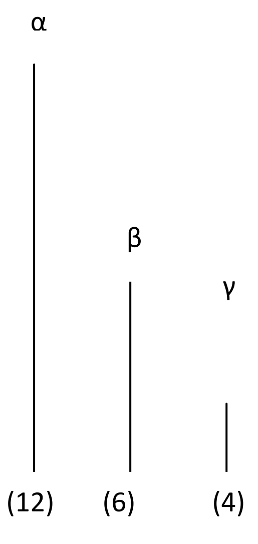
ΠΡΟΤΑΣΗ 7

«Ἐκ τοῦ διπλασίου διαστήματος καὶ ἡμιολίου τριπλάσιον διάστημα γίνεται»

«ἔστω γὰρ ὁ μὲν Α τοῦ Β διπλάσιος, ὁ δὲ Β τοῦ Γ ἡμιόλιος· λέγω, ὅτι ὁ Α τοῦ Γ ἐστι τριπλάσιος. ἐπεὶ γὰρ ὁ Α τοῦ Β ἐστι διπλάσιος, ὁ Α ἄρα ἴσος ἐστὶ δυσὶ τοῖς Β. πάλιν ἐπεὶ ὁ Β τοῦ Γ ἐστιν ἡμιόλιος, ὁ Β ἄρα ἔχει τὸν Γ καὶ τὸ ἥμισυ αὐτοῦ. δύο ἄρα οἱ Β ἴσοι εἰσὶ τρισὶ τοῖς Γ. δύο δὲ οἱ Β ἴσοι εἰσὶ τῷ Α. καὶ ὁ Α ἄρα ἴσος ἐστὶ τρισὶ τοῖς Γ. τριπλάσιος ἄρα ἐστὶν ὁ Α τοῦ Γ»

Μετάφραση

Από το διπλάσιο διάστημα και το ημιόλιο (διάστημα) δημιουργείται τριπλάσιο διάστημα.



Έστω, λοιπόν, ότι ο μεν α είναι διπλάσιος του β, ο δε β είναι ημιόλιος του γ. Ισχυρίζομαι (λέγω) ότι ο α είναι τριπλάσιος του γ.

Διότι, επειδή ο α είναι διπλάσιος του β, συνεπάγεται ότι ο α είναι ίσος με δύο φορές το β. Επειδή πάλι ο β είναι ημιόλιος του γ, συνεπάγεται ότι ο β εμπεριέχει τον γ και το $\frac{1}{2}$ του γ. Άρα δύο φορές ο β ισούται με τρεις φορές τον γ. Δύο, όμως, φορές ο β ισούται με τον α. Και ο α, λοιπόν, είναι ίσος με τρεις φορές τον γ. Άρα ο α είναι τριπλάσιος του γ[20].

ΣΧΟΛΙΑ (Χ. Σπυρίδης)

20. Παρακάτω δίνεται η απόδειξη με μαθηματικά σύμβολα:

Ο α είναι διπλπάσιος του β, άρα

$$\alpha = 2\beta \, (I)$$

Ο β είναι ημιόλιος του γ, άρα

$$\beta = \gamma + \frac{1}{2}\gamma \Rightarrow \beta = \frac{3}{2}\gamma \Rightarrow 2\beta = 3\gamma \, (II)$$

Από (I), (II) έχουμε ότι:

$$\alpha = 3\gamma$$

Άρα ο α είναι τριπλάσιος του γ.

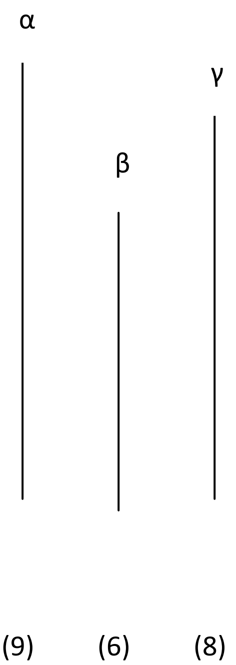
ΠΡΟΤΑΣΗ 8

«Ἐὰν ἀπὸ ἡμιολίου διαστήματος ἐπίτριτον διάστημα ἀφαιρεθῇ, τὸ λοιπὸν καταλείπεται ἐπόγδοον.»

«ἔστω γὰρ ὁ μὲν Α τοῦ Β ἡμιόλιος, ὁ δὲ Γ τοῦ Β ἐπίτριτος· λέγω, ὅτι ὁ Α τοῦ Γ ἐστὶν ἐπόγδοος. ἐπεὶ γὰρ ὁ Α τοῦ Β ἐστιν ἡμιόλιος, ὁ Α ἄρα ἔχει τὸν Β καὶ τὸ ἥμισυ αὐτοῦ. ὀκτὼ ἄρα οἱ Α ἴσοι εἰσὶ δώδεκα τοῖς Β. πάλιν ἐπεὶ ὁ Γ τοῦ Β ἐστὶν ἐπίτριτος, ὁ Γ ἄρα ἔχει τὸν Β καὶ τὸ τρίτον αὐτοῦ. ἐννέα ἄρα οἱ Γ ἴσοι εἰσὶ δώδεκα τοῖς Β, δώδεκα δὲ οἱ Β ἴσοι εἰσὶν ὀκτὼ τοῖς Α· ὀκτὼ ἄρα οἱ Α ἴσοι εἰσὶν ἐννέα τοῖς Γ. ὁ Α ἄρα ἴσος ἐστὶ τῷ Γ καὶ τῷ ὀγδόῳ αὐτοῦ· ὁ Α ἄρα τοῦ Γ ἐστιν ἐπόγδοος.»

Μετάφραση

Εάν από ημιόλιο διάστημα αφαιρεθεί ένα επίτριτο διάστημα, το υπόλοιπο που απομένει είναι το επόγδοο (διάστημα).



Έστω, λοιπόν, ότι ο μεν α είναι ημιόλιος του β, ο δε γ είναι επίτριτος του β. Ισχυρίζομαι (λέγω) ότι ο α είναι επόγδοος του γ.

Διότι, επειδή ο α είναι ημιόλιος του β, συνεπάγεται ότι ο α εμπεριέχει τον β και το $\frac{1}{2}$ του β. Άρα οκτώ φορές ο α ισούται με δώδεκα φορές τον β. Επειδή, πάλι, ο γ είναι επίτριτος του β, ο γ εμπεριέχει τον β και το $\frac{1}{3}$ του β. Άρα εννέα φορές ο γ ισούται με δώδεκα φορές τον β. Όμως, δώδεκα φορές ο β ισούται με οκτώ φορές τον α. Άρα οκτώ φορές ο α ισούται με εννέα φορές τον γ. Άρα ο α ισούται με τον γ και το $\frac{1}{8}$ του γ, συνεπώς ο α είναι επόγδοος του γ[21].

ΣΧΟΛΙΑ (Χ. Σπυρίδης)

21. Παρακάτω δίνεται η απόδειξη με μαθηματικά σύμβολα:

Ο α είναι ημιόλιος τουβ, άρα

$$\alpha = \beta + \frac{1}{2}\beta \Rightarrow \alpha = \frac{3}{2}\beta \Rightarrow 2\alpha = 3\beta \, (I)$$

Ο γ είναι επίτριτος του β, άρα

$$\gamma = \beta + \frac{1}{3}\beta \Rightarrow \gamma = \frac{4}{3}\beta \Rightarrow 3\gamma = 4\beta \, (II)$$

$$\left.\begin{array}{l} (\mathrm{I}) \Rightarrow 8\alpha = 12\beta \\ \\ (\mathrm{II}) \Rightarrow 9\gamma = 12\beta \end{array}\right\} \Rightarrow 8\alpha = 9\gamma \Rightarrow \alpha = \frac{9}{8}\gamma \Rightarrow \alpha = \gamma + \frac{1}{8}\gamma$$

Άρα ο α είναι επόγδοος του γ.

ΠΡΟΤΑΣΗ 9

«Τὰ εξι ἐπόγδοα διαστήματα μείζονά ἐστι διαστήματος ἑνὸς διπλασίου»

«ἔστω γὰρ εἷς ἀριθμὸς ὁ Α. καὶ τοῦ μὲν Α ἐπόγδοος ἔστω ὁ Β, τοῦ δὲ Β ἐπόγδοος ὁ Γ, τοῦ δὲ Γ ἐπόγδοος ὁ Δ, τοῦ δὲ Δ ἐπόγδοος ὁ Ε, τοῦ Ε ἐπόγδοος ὁ Ζ, τοῦ Ζ ἐπόγδοος ὁ Η· λέγω, ὅτι ὁ Η τοῦ Α μείζων ἐστὶν ἢ διπλάσιος. ἐπεὶ ἐμάθομεν εὑρεῖν ἑπτὰ ἀριθμοὺς ἐπογδόους ἀλλήλων, εὑρήσθωσαν οἱ Α, Β, Γ, Δ, Ε, Ζ, Η, καὶ γίνεται

ὁ μὲν Α κϛ μύρια βρμδ,

ὁ δὲ Β κθ μύρια δϡιβ,

ὁ δὲ Γ λγ μύρια αψοϛ,

ὁ δὲ Δ λζ μύρια γσμη,

ὁ δὲ Ε μα μύρια θϡδ,

ὁ δὲ Ζ μζ μύρια βτϙβ,

ὁ δὲ Η νγ μύρια αυμα, καί ἐστιν ὁ Η τοῦ Α μείζων ἢ διπλάσιος»

Μετάφραση

Τα έξι επόγδοα διαστήματα είναι μεγαλύτερα από ένα διπλάσιο διάστημα.

Διότι, έστω ένας αριθμός, ο α, και έστω ότι του μεν α επόγδοος είναι ο β, του δε β επόγδοος είναι ο γ, του δε γ επόγδοος είναι ο δ, του δε δ επόγδοος είναι ο ε, του δε ε επόγδοος είναι ο ζ, του δε ζ επόγδοος είναι ο η.

Ισχυρίζομαι (λέγω) ότι ο η είναι μεγαλύτερος από τον διπλάσιο του α. Επειδή μάθαμε να βρίσκουμε επτά αριθμούς επόγδοους μεταξύ τους[22], έστω ότι βρέθηκαν οι α, β, γ, δ, ε, ζ, η και γίνεται (με την έννοια του «ας ληφθεί») ο μεν α 262144, ο δε β 294912, ο δε γ 331776, ο δε δ 373248, ο δε ε 419904, ο δε ζ 472392, ο δε η 531441 και είναι ο η μεγαλύτερος του α[23].

ΣΧΟΛΙΑ (Χ. Σπυρίδης)

22. Είναι η Πρόταση 2 του βιβλίου VII των «Στοιχείων»

23. Με τη γλώσσα των μαθηματικών η απόδειξη είναι η εξής:

Έστω ένας αριθμός α και $\beta = \frac{9}{8}\alpha$

$$\gamma = \frac{9}{8}\beta \Rightarrow \gamma = \left(\frac{9}{8}\right)^2 \alpha$$

$$\delta = \frac{9}{8}\gamma \Rightarrow \delta = \left(\frac{9}{8}\right)^3 \alpha$$

$$\varepsilon = \frac{9}{8}\delta \Rightarrow \varepsilon = \left(\frac{9}{8}\right)^4 \alpha$$

$$\zeta = \frac{9}{8}\varepsilon \Rightarrow \zeta = \left(\frac{9}{8}\right)^5 \alpha$$

$$\eta = \frac{9}{8}\zeta \Rightarrow \eta = \left(\frac{9}{8}\right)^6 \alpha$$

Ισχυρισμός: Ο η είναι μεγαλύτερος από τον 2α

Απόδειξη Ισχυρισμού: Κατ’ αρχήν,

$$\eta = \left(\frac{9}{8}\right)^6 \alpha \Rightarrow \eta = \left(\frac{3^2}{2^3}\right)^6 \alpha \Rightarrow \eta = \frac{3^{12}}{2^{18}}\alpha$$

Ο Ευκλείδης επέλεξε, για απλούστευση των μαθηματικών πράξεων, ως $\alpha = 2^{18} = 262144$. Τότε:

$$\beta = \frac{9}{8}\alpha = \frac{3^2}{2^3} \cdot 2^{18} = 3^2 \cdot 2^{15} = 294912$$

$$\gamma = \left(\frac{9}{8}\right)^2 \alpha = \frac{3^4}{2^6} \cdot 2^{18} = 3^4 \cdot 2^{12} = 331776$$

$$\delta = \left(\frac{9}{8}\right)^3 \alpha = \frac{3^6}{2^9} \cdot 2^{18} = 3^6 \cdot 2^9 = 373248$$

$$\varepsilon = \left(\frac{9}{8}\right)^4 \alpha = \frac{3^8}{2^{12}} \cdot 2^{18} = 3^8 \cdot 2^6 = 419904$$

$$\zeta = \left(\frac{9}{8}\right)^5 \alpha = \frac{3^{10}}{2^{15}} \cdot 2^{18} = 3^{10} \cdot 2^3 = 472392$$

$$\eta = \left(\frac{9}{8}\right)^6 \alpha = \frac{3^{12}}{2^{18}} \cdot 2^{18} = 3^{12} = 531441$$

Τότε θα είναι:

$$2\alpha = 2 \cdot 262144 = 524288 < 631441 = \eta$$

Σήμερα, εξάλλου, γνωρίζουμε ότι το διάστημα των έξι επόγδοων $\left(\frac{9}{8}\right)^6 = 2{,}027 > 2$

που είναι το διάστημα μιας οκτάβας.

Σύμφωνα με τον Barker, οι πρώτες εννιά προτάσεις (Π1 - Π9) έχουν ως σκοπό να παγιώσουν κάποιες βασικές αλήθειες για τους λόγους, χωρίς καμία αναφορά στα μουσικά φαινόμενα. Κρίνεται σκόπιμο να σημειωθούν δύο πράγματα. Πρώτον, σε τρεις περιπτώσεις (Π2, Π3 και Π9) ο συγγραφέας στηρίζεται σε αρχές και αποδείξεις που δεν περιγράφονται στο παρόν κείμενο. Κατά συνέπεια, η αποδεικτική εγκυρότητα των θεωρημάτων δεν μπορεί να εκτιμηθεί ολοκληρωτικά, εκτός κι αν αυτό γίνει με βάση το υπόβαθρο ενός πρότερου μαθηματικού συστήματος – έργου. Δεύτερον, θα πρέπει να σημειωθεί το γεγονός ότι υπάρχουν τρεις βασικοί λόγοι (2:1, 3:2 και 4:3). Ενώ, λοιπόν, στην Π6 παίρνουμε το γινόμενο των 3:2 και 4:3 και στην Π7 αυτό του 2:1 και του 3:2, δεν γίνεται καμία αναφορά στο γινόμενο των 2:1 και 4:3 (το οποίο φυσικά είναι το 8:3) κι αυτή η παράλειψη είναι σημαντική. Μία πιθανή απάντηση στον Barker δόθηκε από τον Barbera και προαναφέρθηκε στα αρχικά σχόλια.

Ο Barker συνεχίζει λέγοντας ότι το επόμενο σύνολο προτάσεων χρησιμοποιεί τα μαθηματικά αποτελέσματα που προέκυψαν μέχρι εκεί και, επιπλέον, φέρει μουσικά στοιχεία και προβαίνει σε συμπεράσματα τα οποία σχετίζονται με μουσικά φαινόμενα. Οι Π10 – Π16 σχετίζονται με τους λόγους των σπουδαιότερων μουσικών διαστημάτων, πάνω στα οποία μπορεί να χτιστεί ολόκληρο το σύστημα μιας κλίμακας και αποδεικνύουν κάποιες ιδιότητες αυτών των διαστημάτων.

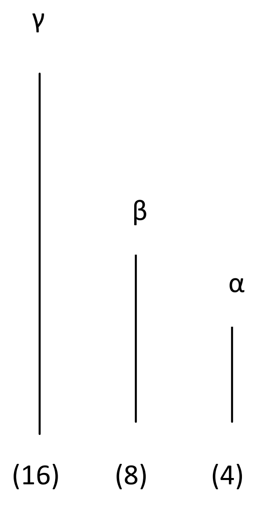
<u>ΠΡΟΤΑΣΗ 10</u>

«Τὸ διὰ πασῶν διάστημά ἐστι πολλαπλάσιον.»

«ἔστω γὰρ νήτη μὲν ὑπερβολαίων ὁ Α, μέση δὲ ὁ Β, προσλαμβανόμενος δὲ ὁ Γ. τὸ ἄρα ΑΓ διάστημα δὶς διὰ πασῶν ὄν ἐστι σύμφωνον. ἤτοι οὖν ἐπιμόριόν ἐστιν ἢ πολλαπλάσιον. ἐπιμόριον μὲν οὐκ ἔστιν· ἐπιμορίου γὰρ διαστήματος μέσος οὐδεὶς ἀνάλογον ἐμπίπτει· πολλαπλάσιον ἄρα ἐστίν. ἐπεὶ οὖν δύο <ἴσα> διαστήματα τὰ ΑΒ, ΒΓ συντεθέντα ποιεῖ πολλαπλάσιον τὸ ὅλον, καὶ τὸ ΑΒ ἄρα ἐστὶ πολλαπλάσιον.»

<u>Μετάφραση</u>

Το διαπασών διάστημα είναι πολλαπλάσιο.



Διότι έστω[24] ότι ο μεν α είναι νήτη υπερβολαίων ο δε β είναι μέση και ότι ο γ είναι ο προσλαμβανόμενος. Άρα το διάστημα αγ[25], όντας δύο φορές το διαπασών (δις διαπασών), είναι σύμφωνο (διάστημα)[26]. Κατόπιν τούτου, λοιπόν, ή είναι διάστημα επιμόριο ή είναι διάστημα πολλαπλάσιο[27]. Πάντως επιμόριο διάστημα δεν είναι, διότι σε επιμόριο διάστημα κανένας μέσος ανάλογος αριθμός δεν παρεμβάλλεται[28]. Άρα είναι διάστημα πολλαπλάσιο. Επειδή, λοιπόν, δύο ίσα διαστήματα, τα αβ και βγ, συντιθέμενα δημιουργούν πολλαπλάσιο ολικό διάστημα, συνεπάγεται ότι και το διάστημα αβ είναι πολλαπλάσιο[29].

<u>*ΣΧΟΛΙΑ* (Χ. Σπυρίδης)</u>

24. Ονομασία και ονοματοθεσία.

Στην αρχαία ελληνική μουσική γινόταν χρήση ονομάτων για τον προσδιορισμό των φθόγγων. Αρχικά τα ονόματα δόθηκαν στις χορδές της λύρας σύμφωνα με τη θέση τους στο όργανο. Όταν η λέξη χορδή, με τη συνεχή και πρακτική χρήση, έγινε συνώνυμη του φθόγγου, τα ονόματα χρησιμοποιούνταν χωρίς διάκριση τόσο για τις χορδές, όσο και για τους αντίστοιχους φθόγγους. Από τον 6ο αι. π.Χ., όταν η επτάχορδη λύρα έγινε οκτάχορδη, τα ονόματα ήταν τα ακόλουθα:

Νήτη, νεάτη (=χαμηλότατη), η ψηλότερη νότα, όσον αφορά στο μουσικό της ύψος

Παρανήτη, η αμέσως πιο κάτω από τη νήτη

Τρίτη, η τρίτη από πάνω προς τα κάτω (όσον αφορά στο μουσικό ύψος)

Παραμέση, η πλαϊνή της μέσης προς τα πάνω (όσον αφορά στο μουσικό ύψος)

Μέση, η κεντρική νότα

Λιχανός, η χορδή που παιζόταν με το λιχανό, το δείκτη

Παρυπάτη, η πλαϊνή της υπάτης προς τα πάνω (όσον αφορά στο μουσικό ύψος)

Υπάτη (=υψίστη), η πιο χαμηλή νότα, όσον αφορά στο μουσικό της ύψος

Η παραπάνω ονοματολογία χρειάζεται κάποια επεξήγηση. Η νήτη, ενώ σήμαινε την έσχατη χορδή, ήταν στην πραγματικότητα η ψηλότερη χορδή. Αυτό οφείλεται στη θέση της χορδής νήτη, που ήταν τοποθετημένη στο πλησιέστερο σημείο προς τον εκτελεστή. Η υπάτη, ακριβώς το αντίθετο με τη νήτη, αλλά κατά παρόμοια αντιστοιχία, ενώ σήμαινε την πιο ψηλή χορδή, στην πραγματικότητα ήταν η χαμηλότερη, γιατί η αντίστοιχη χορδή ήταν τοποθετημένη στο άλλο άκρο, το πιο μακρινό από τον εκτελεστή.

Όσον αφορά τον προσλαμβανόμενο, πρόκειται για τον προστιθέμενο φθόγγο. Έτσι ονομαζόταν ο φθόγγος, η νότα, που προσέθεταν κάτω από το πιο χαμηλό τετράχορδο.

25. Ο β απέχει από τον γ δύο συνημμένα τετράχορδα κι έναν τόνο, ενώ ο α απέχει από τον γ κατά διάστημα δύο διαπασών. Με το συμβολισμό αγ υπονοείται το διάστημα που σχηματίζουν οι φθόγγοι α και γ, δηλαδή το διάστημα μεταξύ νήτης υπερβολαίων και προσλαμβανόμενου.

26. Από τον ίδιο τον Ευκλείδη, αλλά και από άλλους αρχαίους Έλληνες «αρμονικούς» συγγραφείς, μας σώζεται η πληροφορία ότι τα διαστήματα

«επίτριτον» («διά τεσσάρων»), «ημιόλιον» («διά πέντε»), «διά πασών» («οκτάβα»), «διά πασών και επίτριτον», «διά πασών και ημιόλιον» και «δις διαπασών» θεωρούνταν ως σύμφωνα διαστήματα.

27. Αυτή η παρατήρηση προέρχεται από την αρχή που διατυπώθηκε στο τέλος της εισαγωγής.

28. Από την Πρόταση 3. Η νότα μέση χωρίζει το διάστημα της διπλής οκτάβας στη μέση. Αυτό σημαίνει ότι η σχέση ανάμεσα στον προσλαμβανόμενο και τη μέση είναι η ίδια με αυτή της μέσης με τη νήτη.

29. Από την Πρόταση 2.

ΠΡΟΤΑΣΗ 11

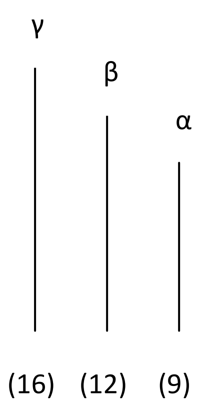
«Τὸ διὰ τεσσάρων διάστημα καὶ τὸ διὰ πέντε ἑκάτερον ἐπιμόριόν ἐστιν.»

«ἔστω γὰρ νήτη μὲν συνημμένων ὁ Α, μέση δὲ ὁ Β, ὑπάτη δὲ μέσων ὁ Γ. τὸ ἄρα ΑΓ διάστημα δὶς διὰ τεσσάρων ὂν ἐστι διάφωνον· οὐκ ἄρα ἐστὶ πολλαπλάσιον.

ἐπεὶ οὖν δύο διαστήματα ἴσα τὰ ΑΒ, ΒΓ συντεθέντα τὸ ὅλον μὴ ποιεῖ πολλαπλάσιον, οὐδὲ ἄρα τὸ ΑΒ ἐστι πολλαπλάσιον. καί ἐστι σύμφωνον· ἐπιμόριον ἄρα. ἡ αὐτὴ δὲ ἀπόδειξις καὶ ἐπὶ τοῦ διὰ πέντε.»

Μετάφραση

Το διά τεσσάρων διάστημα[30] και το διαπέντε διάστημα[31] το καθένα τους είναι επιμόριο (διάστημα).



Διότι έστω ότι ο μεν α είναι νήτη συνημμένων, ο δε β είναι μέση και ότι ο γ είναι υπάτη μέσων. Άρα το διάστημα αγ, όντας «δις διατεσσάρων» (δηλαδή μεγέθους δύο τετραχόρδωνή δύο επίτριτων), είναι διάφωνο. Συνεπώς δεν είναι πολλαπλάσιο[32]. Επειδή, λοιπόν, δύο ίσα τμήματα τα αβ και βγ, συνενούμενα δημιουργούν ολικό διάστημα μη πολλαπλάσιο, συμπεραίνεται ότι ούτε το διάστημα αβ είναι πολλαπλάσιο[33]. Είναι και σύμφωνο. Άρα είναι επιμόριο. Η ίδια απόδειξη και για το διαπέντε διάστημα.

ΣΧΟΛΙΑ (Χ. Σπυρίδης)

30. Η «διά τεσσάρων χορδών συμφωνία» είναι το διάστημα καθαρής τετάρτης που οι Πυθαγόρειοι ονόμαζαν «συλλαβή» ή «συλλαβά» (λόγος 4:3). Η λέξη συλλαβή

προέρχεται από το ρήμα συλλαμβάνω (=παίρνω μαζί, συνδέω) και γι’ αυτό στη μουσική η συλλαβή ήταν μια ένωση ή συνδυασμός φθόγγων. Κατά τον Νικόμαχο, οι παλαιότατοι ονόμαζαν συλλαβά την τετάρτη, γιατί ήταν ο πρώτος συνδυασμός σύμφωνων φθόγγων.

31. Η «διά πέντε χορδών συμφωνία» είναι το διάστημα της καθαρής πέμπτης, το οποίο οι Πυθαγόρειοι ονόμαζαν «δι’ οξειών» ή «διοξεία». Στο ένατο εγχειρίδιο, Νικόμαχος αναφέρεται στον ορισμό του Φιλολάου: «ἁρμονίας δὲ μέγεθος συλλαβὰ καὶ δι' ὀξειᾶν. τὸ δὲ δι' ὀξειᾶν μεῖζον τᾶς συλλαβᾶς ἐπογδόῳ. ἔστι γὰρ ἀπὸ ὑπάτας εἰς μέσαν συλλαβὰ, ἀπὸ δὲ μέσας πότι νεάταν δι' ὀξειᾶν», δηλαδή [το μέγεθος της αρμονίας (της 8ης) είναι ίσο προς μια συλλαβή (διάστημα 3ης) και μια δι’ οξειών (διάστημα 5ης), γιατί από την υπάτη ως τη μέση είναι μια 4η και από τη μέση ως τη νήτη είναι μια 5η].

32. Στο εν λόγω θεώρημα δηλώνεται ως επακόλουθο των όσων αναφέρθηκαν στην εισαγωγή του έργου ότι «το διάφωνο διάστημα δεν είναι πολλαπλάσιο». Με την προτασιακή άλγεβρα θα λέγαμε ότι:

Πρόταση 1: Το «διά τεσσάρων» διάστημα δεν είναι πολλαπλάσιο.

Πρόταση 2: Το «διά τεσσάρων» διάστημα είναι σύμφωνο, που συνεπάγεται ότι, είτε είναι επιμόριο, είτε ότι είναι πολλαπλάσιο, που το δεύτερο αποκλείεται από την Πρόταση 1.

Άρα το «διά τεσσάρων» διάστημα είναι επιμόριο.

33. Από την Πρόταση 5

<u>ΠΡΟΤΑΣΗ 12</u>

«Τὸ διὰ πασῶν διάστημά ἐστι διπλάσιον.»

«ἐδείξαμεν γὰρ αὐτὸ πολλαπλάσιον. οὐκοῦν ἤτοι διπλάσιόν ἐστιν–ἢ μεῖζον ἢ διπλάσιον. ἀλλ' ἐπεὶ ἐδείξαμεν τὸ διπλάσιον διάστημα ἐκ δύο τῶν μεγίστων ἐπιμορίων συγκείμενον, ὥστε, εἰ ἔσται τὸ διὰ πασῶν μεῖζον διπλασίου, οὐ συγκείσεται ἐκ δύο μόνων ἐπιμορίων, ἀλλ' ἐκ πλειόνων, –σύγκειται δὲ ἐκ δύο συμφώνων διαστημάτων, ἔκ τε τοῦ διὰ πέντε καὶ τοῦ διὰ τεσσάρων, οὐκ ἄρα ἔσται τὸ διὰ πασῶν μεῖζον διπλασίου. διπλάσιον ἄρα.

ἀλλ' ἐπειδὴ τὸ διὰ πασῶν ἐστι διπλάσιον, τὸ δὲ διπλάσιον ἐκ τῶν μεγίστων ἐπιμορίων δύο συνέστηκε, καὶ τὸ διὰ πασῶν ἄρα ἐξ ἡμιολίου καὶ ἐπιτρίτου συνέστηκε· ταῦτα γὰρ μέγιστα. συνέστηκε δὲ ἐκ τοῦ διὰ πέντε καὶ ἐκ τοῦ διὰ τεσσάρων, ὄντων ἐπιμορίων· τὸ μὲν ἄρα διὰ πέντε, ἐπειδὴ μεῖζόν ἐστιν, ἡμιόλιον ἂν εἴη, τὸ δὲ διὰ τεσσάρων ἐπίτριτον.

φανερὸν δή, ὅτι καὶ τὸ διὰ πέντε καὶ διὰ πασῶν τριπλάσιόν ἐστιν. ἐδείξαμεν γάρ, ὅτι ἐκ διπλασίου διαστήματος καὶ ἡμιολίου τριπλάσιον διάστημα γίνεται, ὥστε καὶ τὸ διὰ πασῶν καὶ τὸ διὰ πέντε τριπλάσιον. τὸ δὲ δὶς διὰ πασῶν τετραπλάσιόν ἐστιν.

ἀποδέδεικται ἄρα τῶν συμφώνων ἕκαστον, ἐν τίσι λόγοις ἔχει τοὺς περιέχοντας φθόγγους πρὸς ἀλλήλους».

Μετάφραση

Το διαπασών διάστημα είναι διπλάσιο.

Διότι αποδείξαμε ότι αυτό (το διαπασών διάστημα) είναι πολλαπλάσιο. Άρα ή είναι διπλάσιο ή είναι μεγαλύτερο από το διπλάσιο. Αλλά, επειδή αποδείξαμε ότι το διπλάσιο διάστημα συνίσταται από τα δύο μέγιστα επιμόρια διαστήματα, ώστε, εάν θα είναι το διαπασών διάστημα μεγαλύτερο από το διπλάσιο, δεν θα συνίστανται από δύο μόνον επιμόρια διαστήματα, αλλά από περισσότερα, -συνίσταται, όμως, από δύο σύμφωνα διαστήματα, αυτό του «διά πέντε» και αυτό του «διά τεσσάρων». Άρα, λοιπόν, δεν θα είναι το διαπασών διάστημα μεγαλύτερο από το διπλάσιο. Συνεπώς, θα είναι διπλάσιο.

Άλλά, επειδή το διαπασών διάστημα είναι διπλάσιο, το δε διπλάσιο (διάστημα) συνίσταται από τα δύο μέγιστα επιμόρια διαστήματα, και το διαπασών διάστημα άρα συνίσταται από ημιόλιο και επίτριτο διάστημα, διότι αυτά είναι τα μέγιστα.

Δομήθηκε δε (το διαπασών διάστημα) από το διά πέντε διάστημα και το διά τεσσάρων διάστημα[34], που είναι επιμόρια. Άρα, λοιπόν, το μεν διά πεντε διάστημα, επειδή είναι το μεγαλύτερο, θα πρέπει να είναι το ημιόλιον, το δε διά τεσσάρων (διάστημα θα πρέπει να είναι) το επίτριτο.

Είναι φανερό, λοιπόν, ότι το διάστημα διά πέντε και διά πασών είναι τριπλάσιο[35]. Διότι αποδείξαμε ότι από διπλάσιο και ημιόλιο διάστημα δημιουργείται διάστημα τριπλάσιο[36]. Ώστε το διά πασών διάστημα μαζί με το διά πέντε διάστημα (δομούν) τριπλάσιο διάστημα.

Το δε δις διαπασών διάστημα είναι τετραπλάσιο[37].

Άρα, έχει αποδειχθεί ποια σχέση υφίσταται μεταξύ των περιεχόντων[38] φθόγγων του κάθε σύμφωνου διαστήματος.

ΣΧΟΛΙΑ (Χ. Σπυρίδης)

34. Από την Άλγεβρα των μουσικών διαστημάτων προκύπτει ότι η πρόσθεση του «διά πέντε» διαστήματος και του διά τεσσάρων διαστήματος δίνει:

$\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}=\frac{2}{1}$ (το διαπασών διάστημα)

35. Από την Άλγεβρα των μουσικών διαστημάτων προκύπτει ότι η πρόσθεση του «διαπασών» διαστήματος και του «διά πέντε» διαστήματος δίνει:

$\frac{2}{1}\cdot\frac{3}{2}=\frac{3}{1}$ (το τριπλάσιο διάστημα)

36. Από την Πρόταση 7

37. Από την Άλγεβρα των μουσικών διαστημάτων προκύπτει ότι ο πολλαπλασιασμός του «διαπασών» διαστήματος επί τον αριθμό 2 δίνει:

$\left(\frac{2}{1}\right)^2=\frac{4}{1}$ (το τετραπλάσιο διάστημα)

38. Εννοεί τους εστώτες φθόγγους του κάθε σύμφωνου διαστήματος. Με τον όρο «εστώτες» εννοούνται οι φθόγγοι ενός τετραχόρδου που παρέμεναν ακίνητοι, δηλαδή δεν άλλαζαν παρά τις οποιεσδήποτε αλλαγές στο γένος του τετραχόρδου. Ο Νικόμαχος λέει ότι «οι ακρινοί φθόγγοι ενός τετραχόρδου λέγονται εστώτες, γιατί ουδέποτε αλλάζουν σε οποιοδήποτε από τα γένη». Επιπλέον, ο Αριστόξενος χρησιμοποιεί τον όρο «ακίνητοι» αντί «εστώτες». Ο δε Αλύπιος λέει τους «εστώτες» και «ακλινείς» (σταθεροί, αμετακίνητοι). Από την άλλη μεριά, «κινούμενοι» ήταν οι φθόγγοι που βρίσκονταν ανάμεσα στα δύο ακρα, στη μέση του τετραχόρδου, και που άλλαζαν ανάλογα με το γένος. Ο Βακχείος καλούσε τους κινούμενους φθόγγους ως «φερόμενους».

Η σχέση των εστώτων φθόγγων στα παρακάτω σύμφωνα διαστήματα είναι:

«διά τεσσάρων» ή «επίτριτον» 4:3

«διά πέντε» ή «ημιόλιον» 3:2

«διαπασών» 2:1

«δις διαπασών» 4:1

<u>ΠΡΟΤΑΣΗ 13</u>

«Λοιπὸν δὴ περὶ τοῦ τονιαίου διαστήματος διελθεῖν, ὅτι ἐστὶν ἐπόγδοον.»

«ἐμάθομεν γάρ, ὅτι, ἐὰν ἀπὸ ἡμιολίου διαστήματος ἐπίτριτον διάστημα ἀφαιρεθῇ, τὸ λοιπὸν καταλείπεται ἐπόγδοον. ἐὰν δὲ ἀπὸ τοῦ διὰ πέντε τὸ διὰ τεσσάρων ἀφαιρεθῇ, τὸ λοιπὸν τονιαῖόν ἐστι διάστημα· τὸ ἄρα τονιαῖον διάστημά ἐστιν ἐπόγδοον»

<u>Μετάφραση</u>

Λοιπόν, πρέπει να συζητήσουμε σχετικά με το τονιαίο[39] διάστημα, ότι δηλαδή είναι επόγδοο.

Διότι μάθαμε ότι, εάν από το ημιόλιο διάστημα αφαιρεθεί το επίτριτο διάστημα, αυτό που απομένει είναι το επόγδοο (διάστημα). Εάν δε από το «διά πέντε» διάστημα αφαιρεθεί το «διά τεσσάρων» διάστημα, αυτό που απομένει είναι το τονιαίο διάστημα (διάστημα ενός τόνου). Άρα το τονιαίο διάστημα είναι επόγδοο[40].

<u>*ΣΧΟΛΙΑ* (Χ. Σπυρίδης)</u>

39. Ο όρος «τόνος» είχε διάφορες, και κάποτε όχι ολότελα ξεκαθαρισμένες, σημασίες στην αρχαία ελληνική μουσική. Οι περισσότεροι, όμως, συγγραφείς συμφωνούν στις ακόλουθες σημασίες του όρου:

τάση (τάσις, ύψος)

διάστημα, δηλαδή το διάστημα κατά το οποίο η 5η ξεπερνά την 4η. Αλλιώς, η μεγάλη 2η, όπως λέμε και σήμερα

κλίμακα, τοποθετημένη σε ένα ορισμένο ύψος, π.χ. δώριος τόνος, φρύγιος τόνος (όπως λέμε σήμερα τόνος του σολ, τόνος του ρε κλπ.)

φθόγγος, ήχος (αυτή η σημασία δίνεται από τον Κλεονείδη)

αρμονία, ο Αριστόξενος δίνει τον ακόλουθο ορισμό για τον τόνο: «Το πέμπτο μέρος της αρμονικής ασχολείται με τους τόνους, πάνω στους οποίους εκτελούνται τα συστήματα». Έτσι ο τόνος είναι ο τόπος ή η περιοχή ή το ύψος όπου μια αρμονία μπορεί να αναπαραχθεί.

40. Από την Άλγεβρα των μουσικών διαστημάτων προκύπτει ότι η αφαίρεση του «διά τεσσάρων» διαστήματος από το «διά πέντε» διάστημα δίνει: $\frac{\frac{3}{2}}{\frac{4}{3}} = \frac{9}{8}$ (επόγδοος τόνος)

ΠΡΟΤΑΣΗ 14

«Τὸ διὰ πασῶν ἔλαττον ἢ ὲξι τόνων.»

«δέδεικται γὰρ τὸ μὲν διὰ πασῶν διπλάσιον, ὁ δὲ τόνος ἐπόγδοος· τὰ δὲ ὲξι ἐπόγδοα διαστήματα μείζονα διαστήματός [ἐστι] διπλασίου. τὸ ἄρα διὰ πασῶν ἔλαττόν ἐστιν ὲξι τόνων»

Μετάφραση

Το διαπασών διάστημα είναι μικρότερο από έξι (επόγδοους) τόνους.

Διότι έχει αποδειχθεί ότι το μεν διαπασών διάστημα είναι διπλάσιο, ο δε τόνος είναι επόγδοος[41]. Τα δε έξι επόγδοα διαστήματα (συνθέτουν διάστημα) μεγαλύτερο από το διπλάσιο[42]. Άρα, λοιπόν, το διαπασών διάστημα είναι μικρότερο από έξι (επόγδοους) τόνους.

ΣΧΟΛΙΑ (Χ. Σπυρίδης)

41. Αυτά ισχύουν στις Προτάσεις 12 και 13. Η θεωρία του Αριστόξενου υποθέτει ότι οι έξι τόνοι είναι ακριβώς ίσοι με μια οκτάβα.

42. Από την Πρόταση 9. Από την Άλγεβρα των μουσικών διαστημάτων προκύπτει ότι το εξαπλάσιο του επόγδοου τόνου είναι ίσο με:

$\left(\frac{9}{8}\right)^6 = 2{,}027 > 2 = \frac{2}{1}$ (το διαπασών διάστημα)

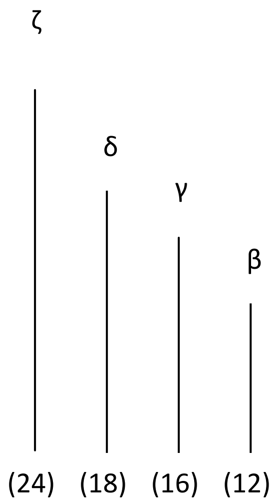
ΠΡΟΤΑΣΗ 15

«Τὸ διὰ τεσσάρων ἔλαττον δύο τόνων καὶ ἡμιτονίου, καὶ τὸ διὰ πέντε ἔλαττον τριῶν τόνων καὶ ἡμιτονίου.»

«ἔστω γὰρ νήτη μὲν διεζευγμένων ὁ Β, παραμέση δὲ ὁ Γ, μέση δὲ ὁ Δ, ὑπάτη δὲ μέσων ὁ Ζ. οὐκοῦν τὸ μὲν ΓΔ διάστημα τόνος ἐστί, τὸ δὲ ΒΖ, διὰ πασῶν ὄν, ἔλαττον ὲξι τόνων. τὰ λοιπὰ ἄρα, τό τε ΒΓ καὶ τὸ ΔΖ ἴσα ὄντα ἐλάττονά ἐστι πέντε τόνων. ὥστε τὸ ἐν τῷ ΒΓ ἔλαττον δύο τόνων καὶ ἡμιτονίου, ὅ ἐστι διὰ τεσσάρων, τὸ δὲ ΒΔ ἔλαττον τριῶν τόνων καὶ ἡμιτονίου, ὅ ἐστι διὰ πέντε.»

Μετάφραση

Το «διά τεσσάρων» (διάστημα) είναι μικρότερο από δύο τόνους και ένα ημιτόνιο[43] και το «διά πέντε» (διάστημα) είναι μικρότερο από τρεις τόνους και ένα ημιτόνιο[44].



Διότι έστω ότι ο μεν β είναι νήτη διαζευγμένων, ο δε γ είναι η παραμέση, ότι ο δ είναι η μέση και ότι ο ζ είναι η υπάτη μέσων[45]. Λοιπόν το μεν διάστημα γδ είναι τόνος[46], το δε (διάστημα) βζ, όντας διαπασών, είναι μικρότερο από έξι τόνους[47]. Συνεπώς τα λοιπά (διαστήματα) δηλαδή και το βγ και το δζ, όντας ίσα, είναι μικρότερα από πέντε τόνους. Ώστε το διάστημα που περιλαμβάνεται στο βγ είναι μικρότερο από δύο τόνους και ένα ημιτόνιο, το οποίο είναι το διά τεσσάρων (διάστημα), το δε διάστημα βδ είναι μικρότερο από τρεις τόνους και ένα ημιτόνιο, το οποίο είναι το διά πέντε (διάστημα).

ΣΧΟΛΙΑ (Χ. Σπυρίδης)

43. Ο τόνος διαιρούνταν σε δύο άνισα ημιτόνια, το «μέιζον» και το «έλαττον».

Κατά τον Αριστείδη, για να βρουν οι Αρχαίοι το λόγο του ηιτονίου, αφού ανάμεσα στο 8 και το 9 δεν υπάρχει ακέραιος αριθμός, διπλασίασαν τους όρους του $\frac{9}{8}=\frac{9\cdot 2}{8\cdot 2}=\frac{18}{16}$ κι έτσι πήραν τον ενδιάμεσο όρο, το 17. Έτσι, καθόρισαν το πρώτο ημιτόνιο ως 17:16 (μείζον ημιτόνιο) και το δεύτερο ημιτόνιο ως 18:17 (έλαττον ημιτόνιο).

Ο Αριστόξενος, από την άλλη μεριά, διαιρούσε τον τόνο σε δύο ίσα ημιτόνια.

Από την Άλγεβρα των μουσικών διαστημάτων προκύπτει ότι:

Το «διά τεσσάρων» διάστημα δίνεται από τη σχέση

$$\frac{4}{3}=1{,}333...=1{,}\overline{3}$$

Ο επόγδοος τόνος δίνεται από τη σχέση $\frac{9}{8}$.

Τότε, το διάστημα δύο τόνων και ενός μείζονος ημιτονίου θα δίνεται από τη σχέση $\left(\frac{9}{8}\right)^2 \cdot \frac{17}{16} = 1{,}3447 > 1{,}\overline{3} = \frac{4}{3}$ (το «διά τεσσάρων» διάστημα).

Επίσης, το διάστημα δύο τόνων και ενός ελάττονος ημιτονίου θα δίνεται από τη σχέση

$\left(\frac{9}{8}\right)^2 \cdot \frac{18}{17} = 1{,}3401 > 1{,}\overline{3} = \frac{4}{3}$ (το «διά τεσσάρων» διάστημα).

44. Το ημιτόνιο, εάν προς στιγμήν θεωρηθεί ίσο ακριβώς με μισό επόγδοο τόνο, κατά παράβαση του θεωρήματος 16, αλλά σε συμφωνία με τις σύγχρονες απόψεις περί συγκερασμού μόνο και μόνο για λόγους καθαρά μαθηματικής προσέγγισης του προβλήματος, δίνεται από τη σχέση $\sqrt{\frac{9}{8}}$. Το διάστημα δύο τόνων και ενός ημιτονίου δίνεται από τη σχέση

$\left(\frac{9}{8}\right)^2 \cdot \sqrt{\frac{9}{8}} = 1{,}3424 > 1{,}\overline{3} = \frac{4}{3}$ (το «διά τεσσάρων» διάστημα).

Εάν αντί του μισού επόγδοου τόνου $\sqrt{\frac{9}{8}}$ ληφθεί υπόψη το διάστημα $\frac{2187}{2048} = \frac{\frac{9}{8}}{\frac{256}{243}}$ που είναι γνωστό ως Αποτομή του Πυθαγόρα, τότε το διάστημα δύο τόνων και μιας αποτομής θα δίνεται από τη σχέση

$\left(\frac{9}{8}\right)^2 \cdot \frac{2187}{2048} = 1{,}3515 > 1{,}\overline{3} = \frac{4}{3}$ (το «διά τεσσάρων» διάστημα).

45. Η νήτη διαζευγμένων είναι μια τετάρτη πάνω από την παραμέση, η παραμέση είναι έναν τόνο πάνω από τη μέση, η υπάτη μέσων είναι μια τετάρτη κάτω από τη μέση και μια οκτάβα κάτω από τη νήτη διαζευγμένων. Οι πέμπτες είναι από την υπάτη στην παραμέση κι από τη μέση στη νήτη.

46. Από την Πρόταση 13.

47. Από την Πρόταση 14.

ΠΡΟΤΑΣΗ 16

«Ὁ τόνος οὐ διαιρεθήσεται εἰς δύο ἴσα οὔτε εἰς πλείω.»

«ἐδείχθη γὰρ ὢν ἐπιμόριος· ἐπιμορίου δὲ διαστήματος μέσοι οὔτε πλείους οὔτε εἷς ἀνάλογον ἐμπίπτουσιν. οὒκ ἄρα διαιρεθήσεται ὁ τόνος εἰς ἴσα»

Μετάφραση

Ο τόνος δε θα διαιρεθεί σε δύο[48] ίσα ή περισσότερα (ίσα διαστήματα).

Διότι αποδείχθηκε ότι (ο τόνος) είναι επιμόριος[49]. Σε επιμόριο δε διάστημα δεν παρεμβάλλονται ούτε ένας ούτε περισσότεροι μέσοι ανάλογοι (αριθμοί)[50]. Άρα ο τόνος δε θα διαιρεθεί σε ίσα (διαστήματα).

ΣΧΟΛΙΑ (Χ. Σπυρίδης)

48. Λείμμα: το υπόλοιπο. Στη μουσική ο όρος αυτός σήμαινε τα εξής:

α) Οι Πυθαγόρειοι δήλωναν με τον όρο αυτό το «έλαττον» ημιτόνιο. Εφόσον ο τόνος μοιραζόταν σε δύο ανόμοια μέρη, το μικρότερο ονομαζόταν «λείμμα». Κατά τον Πλούταρχο, «τοῦτον οἱ μὲν ἁρμονικοὶ δίχα τεμνόμενον οἴονται δύο διαστήματα ποιεῖν, ὧν ἑκάτερον ἡμιτόνιον καλοῦσιν· οἱ δὲ Πυθαγορικοὶ τὴν μὲν εἰς ἴσα τομὴν ἀπέγνωσαν αὐτοῦ, τῶν δὲ τμημάτων ἀνίσων ὄντων λεῖμμα τὸ ἔλαττον ὀνομάζουσιν, ὅτι τοῦ ἡμίσεος ἀπολείπει.», δηλαδή [οι αρμονικοί πιστεύουν ότι ο τόνος διαιρείται σε δύο τμήματα, το καθένα από τα οποία ονομάζουν ημιτόνιο, αλλά οι Πυθαγόρειοι αποδοκίμασαν τη διαίρεση σε ίσα μέρη και ονόμασαν από τα άνισα αυτά μέρη το μικρότερο λείμμα, γιατί είναι μικρότερο από το μισό]. Ο Πτολεμαίος καθορίζει το λείμμα ως εξής: «ᾗ ὑπερέχει τὸ διὰ τεσσάρων τοῦ διτόνου, καλουμένην δὲ λεῖμμα, ἐλάττονα εἶναι ἡμιτονίου», δηλαδή [το διάστημα κατά το οποίο η καθαρή τετάρτη είναι μεγαλύτερη από το δίτονο. Είναι δε το [λείμμα] μικρότερο του ημιτονίου].

β) Λείμμα λεγόταν και η μικρότερη σιωπή (παύση) και σημειωνόταν με το γράμμα Λ (το αρχικό της λέξης Λείμμα).

Αποτομή: (από το ρήμα αποτέμνω = αποκόπτω). Με τον όρο αυτό οι Πυθαγόρειοι ονόμαζαν το «μείζον» ημιτόνιο. Ο δε Φιλόλαος διαιρούσε τον τόνο σε δύο άνισα μέρη, τη δίεση $\left(\frac{13}{27}\right)$ και την αποτομή $\left(\frac{14}{27}\right)$. Έπαιρνε το 3 στην τρίτη δύναμη, δηλαδή 27, διαιρούσε ύστερα το 27 σε δύο, αναγκαστικά ανόμοια, μέρη και ονόμαζε το μικρότερο (13) δίεση και το μεγαλύτερο (14) αποτομή.

49. Από την Πρόταση 13.

50. Από την Πρόταση 3.

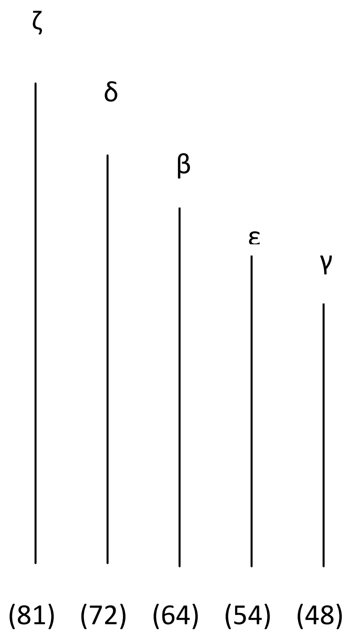
Στο σημείο αυτό ολοκληρώνεται το σύνολο των προτάσεων που αφορούν στους λόγους και τις ιδιότητες των διαστημάτων που προκύπτουν με αφαίρεση από την κλίμακα. Οι Π17 και Π18 αφορούν κάποιες νότες με συγκεκριμένα ονόματα. Ωστόσο ο συγγραφέας δεν αποσαφηνίζει το λόγο που αυτές οι νότες χρήζουν ειδικής μεταχείρησης. Ενώ κατά ένα μέρος τους είναι ξεκάθαρες, ο σοβαρός σκοπός πίσω από αυτές τις προτάσεις είναι πιο απόκρυφος. Αυτό που είναι σαφές είναι ότι αυτές οι νότες δεν βρίσκονται σε κάποιο από τα διαστήματα που έχουν συζητηθεί προηγουμένως από τις σημαντικές σταθερές νότες της κλίμακας κι επομένως οι θέσεις τους πρέπει να καθοριστούν. Η Π17 ορίζει ότι οι θέσεις των δύο ομάδων αυτών των νοτών μπορούν να βρεθούν «μέσω συμφωνιών». Αυτό σημαίνει ότι μπορούν να συσχετιστούν με άλλες γνωστές νότες της κλίμακας, μέσω ήδη γνωστών λόγων. Η Π18 αποδεικνύει ένα ειδικό θεώρημα για νότες που βρίσκονται μέσα στο «πυκνόν», δηλαδή στο υπόλοιπο του τετραχόρδου, μετά το πρώτο διάστημα και προς τα κάτω. Πρόκειται για το δίτονο, το υπόλοιπο του οποίου είναι λιγότερο από ένα ημιτόνιο (Π15). Αυτή η μορφή κλίμακας είναι γνωστή ως εναρμόνιο γένος και αναφέρεται ρητά στις Π17 και Π18, όμως όχι και στις Π19 και Π20. Οι λόγοι για την αλλαγή του γένους θα συζητηθούν παρακάτω. Αυτή η συζήτηση μπορεί να βοηθήσει να ξεκαθαρίσουμε τις παρούσες προτάσεις και τη σχέση με τις προηγούμενες και τις επόμενές τους.

ΠΡΟΤΑΣΗ 17

«Αἱ παρανῆται καὶ αἱ λιχανοὶ ληφθήσονται διὰ συμφωνίας οὕτως. ἔστω γὰρ μέση ὁ Β. ἐπιτετάσθω διὰ τεσσάρων ἐπὶ τὸ Γ, καὶ ἀπὸ τοῦ Γ ἀνείσθω διὰ πέντε ἐπὶ τὸ Δ. τόνος ἄρα ὁ ΒΔ. πάλιν δὲ ἀπὸ τοῦ Δ διὰ τεσσάρων ἐπιτετάσθω ἐπὶ τὸ Ε, καὶ ἀπὸ τοῦ Ε ἀνείσθω ἐπὶ τὸ Ζ διὰ πέντε. τόνος ἄρα τὸ ΖΔ. δίτονος ἄρα τὸ ΖΒ. λιχανὸς ἄρα τὸ Ζ. ὁμοίως ἂν καὶ αἱ παρανῆται ληφθήσονται»

Μετάφραση

Οι παρανήτες[51] και οι λιχανοί[52] θα ληφθούν (θα προκύψουν) με συμφωνίες (χρησιμοποιώντας σύμφωνα διαστήματα) ως εξής:



Έστω, λοιπόν, ο β ως μέση. Με τέντωμα κατά διάστημα «διά τεσσάρων» φθάστε στο γ και από το γ με χαλάρωμα κατά διάστημα «διά πέντε» φθάστε στο δ. Άρα το διάστημα βδ είναι τόνος[53]. Πάλι από το δ με τέντωμα κατά διάστημα «διά τεσσάρων» φθάστε στο ε και από το ε με χαλάρωμα κατά διάστημα «διά πέντε» φθάστε στο ζ. Άρα το διάστημα ζδ είναι τόνος. Το διάστημα ζβ, λοιπόν, είναι δύο τόνων (δίτονο). Συνεπώς το ζ είναι λιχανός. Με όμοιο τρόπο θα προκύψουν (θα ληφθούν) και οι παρανήτες.

<u>*ΣΧΟΛΙΑ* (Χ. Σπυρίδης)</u>

51. Παρανήτη: η νότα και η χορδή «παρά» τη νήτη, μια δευτέρα πιο κάτω. Η παρανήτη διατηρεί το όνομά της και στα τρία γένη, ανεξάρτητα από την απόσταση από τη νήτη.

52. Λιχανός: ως λέξη γένους αρσενικού σημαίνει το δάκτυλο δείκτης, ως λέξη γένους θηλυκού σημαίνει τη χορδή (ή τη νότα που παράγεται από τη χορδή) που παίζεται με το δείκτη, το λιχανό. Ο Αριστείδης Κοϊντιλιανός, στο De Musica, λέει: «λιχανοὶ προσηγορεύθησαν, ὁμωνύμως τῷ πλήττοντι δακτύλῳ τὴν ἠχοῦσαν αὐτὰς χορδὴν ἐπονομασθεῖσαι.», δηλαδή [ονομάστηκαν λιχανοί από το ομώνυμο δάκτυλο, που χτυπά τη χορδή που τις παράγει]. Επίσης, λιχανός ήταν η τρίτη νότα από κάτω, τόσο στο επτάχορδο όσο και στο οκτάχορδο. Συχνά η λιχανός ονομαζόταν και διάτονος.

53. Από την υπόθεση της Πρότασης 13.

<u>*ΠΡΟΤΑΣΗ 18*</u>

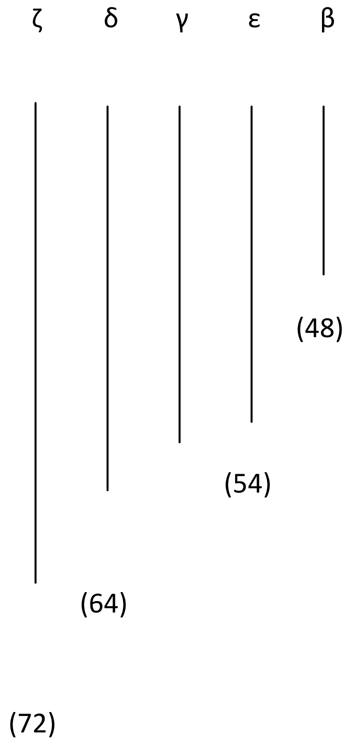
«Αἱ παρυπάται καὶ αἱ τρίται οὐ διαιροῦσι τὸ πυκνὸν εἰς ἴσα.»

«ἔστω γὰρ μέση μὲν ὁ Β, λιχανὸς δὲ ὁ Γ, ὑπάτη δὲ ὁ Δ. ἀνείσθω ἀπὸ τοῦ Β διὰ πέντε ἐπὶ τὸ Ζ. τόνος ἄρα ὁ ΖΔ. καὶ ἀπὸ τοῦ Ζ διὰ τεσσάρων ἐπιτετάσθω ἐπὶ τὸ Ε. τόνος ἐστὶν ἄρα τὸ ΖΔ διάστημα καὶ τὸ ΒΕ. κοινὸν προσκείσθω τὸ ΔΓ. τὸ ἄρα ΖΕ ἴσον ἐστὶ τῷ ΔΒ. διὰ τεσσάρων δὲ τὸ ΖΕ· οὐκ ἄρα μέσος ἀνάλογον ἐμπίπτει τις τῶν ΖΕ· ἐπιμόριον γὰρ τὸ διάστημα. καί ἐστιν ἴσος ὁ ΔΒ τῷ ΖΕ·

οὐκ ἄρα τοῦ ΔΓ μέσος ἐμπεσεῖται, ὅ ἐστιν ἀπὸ ὑπάτης ἐπὶ λιχανόν. οὐκ ἄρα ἡ παρυπάτη διελεῖ τὸ πυκνὸν εἰς ἴσα. ὁμοίως οὐδὲ ἡ τρίτη.»

Μετάφραση

Οι παρυπάτες και οι τρίτες δεν διαιρούν το πυκνόν σε ίσα διαστήματα.



Έστωσαν, λοιπόν, ο μεν β ως μέση, ο δε γ ως λιχανός και ο δ ως υπάτη. Χαλαρώστε από τον β και φθάστε στον ζ με διάστημα «διά πέντε». Άρα το (διάστημα) ζδ είναι τόνος. Και από τον ζ τεντώστε και φθάστε στον ε με διάστημα «διά τεσσάρων». Άρα ο τόνος είναι και το διάστημα ζδ και το διάστημα βε.

Το διάστημα δγ ας μένει ως κοινό. Το διάστημα, λοιπόν, ζε είναι ίσο με το (διάστημα) δβ. Το διάστημα ζε είναι «διά τεσσάρων». Άρα κανένας από τους μέσους του διαστήματος ζε δεν παρεμβάλλεται ως μέσος ανάλογος, διότι είναι επιμόριο το διάστημα. Και είναι το διάστημα δβ ίσο με το διάστημα ζε. Άρα, λοιπόν, δεν θα παρεμβάλλεται μέσος ανάλογος αριθμός στο διάστημα δγ, το οποίο είναι από την θυπάτη ως τον λιχανό. Κατά συνέπεια η παρυπάτη δεν θα διαιρεί το πυκνόν σε ίσα διαστήματα.

Με όμοιο τρόπο ούτε η τρίτη (θα διαιρεί το πυκνόν σε ίσα διαστήματα).

Οι Π19 και Π20 δεν είναι του ίδιου είδους προτάσεις με τις προηγούμενες. Αυτό που μας παρέχουν είναι μια μέθοδο κατασκευής για τον καθορισμό των ορίων του «κανόνα» ή της μετρήσιμης ράβδου, ώστε μια χορδή ίσου μήκους, όταν τεντωθεί πάνω από τη ράβδο και σταματηθεί από μια κινούμενη γέφυρα σε καθένα από τα σημειωμένα σημεία, να παράγει τα διαστήματα της κλίμακας.

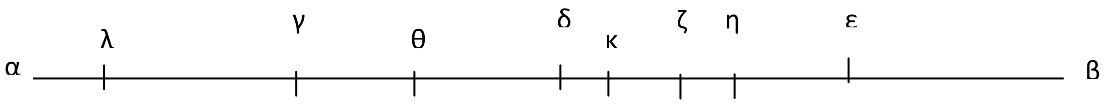
ΠΡΟΤΑΣΗ 19

«Τὸν κανόνα καταγράψαι κατὰ τὸ καλούμενον ἀμετάβολον σύστημα»

«ἔστω τοῦ κανόνος μῆκος, ὃ καὶ τῆς χορδῆς, τὸ ΑΒ, καὶ διῃρήσθω εἰς τέσσαρα ἴσα κατὰ τὰ Γ, Δ, Ε. ἔσται ἄρα ὁ ΒΑ βαρύτατος ὢν φθόγγος βόμβυξ. οὗτος δὲ ὁ ΑΒ τοῦ ΓΒ ἐπίτριτός ἐστιν, ὥστε ὁ ΓΒ τῷ ΑΒ συμφωνήσει διὰ τεσσάρων ἐπὶ τὴν ὀξύτητα. καί ἐστιν ὁ ΑΒ προσλαμβανόμενος· ὁ ἄρα ΓΒ ἔσται ὑπάτων διάτονος. πάλιν ἐπεὶ ὁ ΑΒ τοῦ ΒΔ ἐστι διπλοῦς, συμφωνήσει τῇ διὰ πασῶν καὶ ἔσται ὁ ΒΔ μέση. πάλιν ἐπεὶ τετραπλάσιός ἐστιν ὁ ΑΒ τοῦ ΕΒ, ἔσται ὁ ΕΒ νήτη ὑπερβολαίων. ἔτεμον τὸν ΓΒ δίχα κατὰ τὸ Ζ. καὶ ἔσται διπλάσιος ὁ ΓΒ τοῦ ΖΒ, ὥστε συμφωνεῖν τὸν ΓΒ πρὸς τὸν ΖΒ διὰ πασῶν· ὥστε εἶναι τὸν ΖΒ νήτην συνημμένων. ἀπέλαβον τοῦ ΔΒ τρίτον μέρος τὸ ΔΗ. καὶ ἔσται ἡμιόλιος ὁ ΔΒ τοῦ ΗΒ, ὥστε συμφωνήσει ὁ ΔΒ πρὸς τὸν ΗΒ ἐν τῷ διὰ πέντε· ὁ ἄρα ΗΒ νήτη ἔσται διεζευγμένων. ἔθηκα τῷ ΗΒ ἴσον τὸν ΗΘ, ὥστε ὁ ΘΒ πρὸς τὸν ΗΒ συμφωνήσει διὰ πασῶν, ὡς εἶναι τὸν ΘΒ ὑπάτην μέσων. ἔλαβον τοῦ ΘΒ τρίτον μέρος τὸ ΘΚ. καὶ ἔσται ἡμιόλιος ὁ ΘΒ τοῦ ΚΒ, ὥστε εἶναι τὸν ΚΒ παράμεσον. ἀπέλαβον τῷ ΚΒ ἴσον τὸν ΛΚ καὶ γενήσεται ὁ ΛΒ ὑπάτη βαρεῖα. ἔσονται ἄρα εἰλημμένοι ἐν τῷ κανόνι πάντες οἱ <ἑστῶτες> φθόγγοι τοῦ ἀμεταβόλου συστήματος».

Μετάφραση

Θα καταγραφεί ο κανόνας κατά το αποκαλούμενο αμετάβολον σύστημα[54].



Έστω αβ το μήκος του κανόνα, που είναι και (ίσο με το) μήκος της χορδής και ας διαιρεθεί σε τέσσερα ίσα μήκα στη σημεία γ, δ και ε. Θα είναι, κατά συνέπεια, ο βα «βόμβυξ»[55], όντας ο πιο βαρύς φθόγγος. Αυτός, λοιπόν, ο αβ είναι επίτριτος του γβ (εννοεί ο Ευκλείδης επίτριτος ως προς τα μήκη των δονουμένων τμημάτων της χορδής, δηλαδή $\frac{\alpha\beta}{\gamma\beta}=\frac{4}{3}$), ώστε, όσον αφορά στην οξύτητα του ήχου, ο γβ ως προς τον αβ σχηματίζουν τη «δια τεσσάρων» συμφωνία.

Και είναι ο αβ προσλαμβανόμενος. Κατά συνέπεια, ο γβ θα είναι υπάτων διάτονος[56].

Πάλι, επειδή ο αβ είναι διπλάσιος του βδ (εννοεί ο Ευκλείδης ως προς το μήκος), σχηματίζουν τη διαπασών συμφωνία και θα είναι ο βδ μέση.

Πάλι, επειδή ο αβ είναι τετραπλάσιος (εννοεί ο Ευκλείδης ως προς το μήκος) του εβ, θα είναι ο εβ νήτη υπερβολαίων.

Έτμησα τον γβ στο μέσον του ζ. Και θα είναι ο γβ διπλάσιος (εννοεί ο Ευκλείδης ως προς το μήκος) του ζβ, ώστε ο γβ ως προς τον ζβ σχηματίζει την διαπασών συμφωνία. Οπότε ο ζβ είναι η νήτη συνημμένων.

Πήρα το τμήμα δη να είναι το $\frac{1}{3}$ του δβ και θα είναι ο δβ ημιόλιος (εννοεί ο Ευκλείδης ως προς το μήκος) του ηβ, ώστε ο δβ ως προς τον ηβ σχηματίζει την «δια πέντε» συμφωνία. Οπότε ο ηβ θα είναι η νήτη διαζευγμένων.

Έθεσα τον ηθ ίσον με τον ηβ, ώστε ο θβ ως προς τον ηβ σχηματίζει την διαπασών συμφωνία. Οπότε ο θβ είναι η υπάτη μέσων.

Πήρα τον θκ να είναι το $\frac{1}{3}$ του θβ και θα είναι ο θβ ημιόλιος του κβ (εννοεί ο Ευκλείδης ως προς το μήκος), οπότε ο κβ είναι η παραμέση.

Πήρα τον λκ να είναι ισομήκης του κβ και θα γίνει ο λβ υπάτη βαρεία.

Άρα θα έχουν ληφθεί επάνω στον κανόνα όλοι οι «εστώτες» φθόγγοι του αμετάβολου συστήματος.

ΣΧΟΛΙΑ (Χ. Σπυρίδης)

54. Σύστημα: είναι η ένωση δύο ή περισσότερων διαστημάτων, σύμφωνα με πολλούς αρχαίους θεωρητικούς. Κατά τον Αριστόξενο: «τὸ δὲ σύστημα σύνθετόν τι νοητέον ἐκ πλειόνων ἢ ἑνὸς διαστημάτων», δηλαδή [το σύστημα πρέπει να νοηθεί από περισότερα από ένα διαστήματα]. Τον ίδιο ορισμό δίνει και ο Νικόμαχος: «σύστημα δὲ πλεόνων ἑνὸς διαστημάτων σύνθεσιν» καθώς και ο Κλεονείδης. Σύμφωνα με τους παραπάνω ορισμούς των αρχαίων θεωρητικών, μία ένωση τριών φθόγγων (τρίχορδο), τεσσάρων (τετράχορδο) κλπ. θα έπρεπε να θεωρηθεί ως ένα σύστημα. Κατά την αριστοξένεια θεωρία, τα συστήματα διέφεραν ως προς:

- το μέγεθος «πρώτη μὲν οὖν ἐστὶ διαστημάτων διαίρεσις καθ' ἣν μεγέθει ἀλλήλων διαφέρει»
- το γένος «ἡ κατὰ γένος»
- τη συμφωνία και τη διαφωνία «σύστημα τῷ τε συμφώνους ἢ διαφώνους εἶναι τοὺς ὁρίζοντας φθόγγους»
- το σύμμετρο και το ασύμμετρο «διαφέρει τὰ ῥητὰ τῶν ἀλόγων»
- το συνεχές και μη συνεχές «σύστημα ἤτοι συνεχὲς ἢ ὑπερβατόν ἐστι»
- το συζευγμένο και διαζευγμένο «τὸ συναμφότερον μερίζουσαν· τὸ σύστημα γὰρ ἀπό τινος μεγέθους ἀρξάμενον ἢ συνημμένον ἢ διεζευγμένον ἢ μικτὸν ἐξ ἀμφοτέρων»
- το αμετάβολο και το μεταβολικό

Σύμφωνα με τον Πτολεμαίο: «Τούτων δὴ προεκτεθειμένων σύστημα μὲν ἁπλῶς καλεῖται τὸ συγκείμενον μέγεθος ἐκ συμφωνιῶν, καθάπερ συμφωνία τὸ συγκείμενον μέγεθος ἐξ ἐμμελειῶν, καὶ ἔστιν ὥσπερ συμφωνία συμφωνιῶν τὸ σύστημα», δηλαδή [σύστημα λέγεται απλώς το μέγεθος που αποτελείται από συμφωνίες, όπως ακριβώς συμφωνία είναι το μέγεθος που αποτελείται από εμμέλειες (μελωδικότητες). Έτσι το σύστημα είναι σαν μια συμφωνία συμφωνιών» και «τέλειον δὲ σύστημα λέγεται τὸ περιέχον πάσας τὰς συμφωνίας μετὰ τῶν καθ' ἑκάστην εἰδῶν», δηλαδή [τέλειο σύστημα είναι εκείνο που περιέχει όλες τις συμφωνίες με όλα τα είδη τους].

Απλό σύστημα (ή μη μετατροπικό): Κατά τον Κλεονείδη «απλό είναι ένα σύστημα που είναι αρμοσμένο σε μια μέση, σε αντιδιαστολή με το διπλό που είναι αρμοσμένο σε δύο μέσες κ.ο.κ». Κατά τον Αριστείδη, «απλό σύστημα είναι εκείνο που έχει συντεθεί με έναν τρόπο».

Μεταβολή: είναι η μετατροπία, δηλαδή η αλλαγή που γινόταν κατά τη διάρκεια μιας μελωδίας, ως προς το γένος, το σύστημα, τον τόπο, το ήθος κλπ.

Μετάβολο: μετατροπικό σύστημα, σε αντίθεση προς το απλό (μη μετατροπικό) σύστημα.

55. Βόμβυξ: α) είναι ο σωλήνας, το κύριο σώμα του αυλού

β) στον πληθυντικό, βόμβυκες ονομάζονταν τα «κλειδιά» ή «δαχτυλίδια» που αντιστοιχούσαν στις τρύπες του αυλού και χρησίμευαν στο να τις ανοιγοκλείνουν.

γ) συχνά αποκαλούνταν έτσι και ο ίδιος ο αυλός, ιδιαίτερα ο βαρύτονος

δ) η βαθύτερη (χαμηλότερη) νότα που παράγει ο αυλός με όλες τις τρύπες κλειστές, δηλαδή με ολόκληρο το μήκος της αέρινης στήλης

56. Με βάση τα όσα αναφέρονται στην Πρόταση 19, μπορούμε να βάλουμε «τάστα» σε οποιοδήποτε μάνικο μήκους αβ, δηλαδή να καθορίσουμε επακριβώς τη θέση των φθόγγων επί χορδής, που σχημάτιζαν τα διαστήματα του αμετάβολου συστήματος. Πρέπει να παρατηρήσουμε το εξής: Αν τα ονόματα προσλαμβανόμενος, υπάτων διάτονος, μέση, νήτη υπερβολαίων, νήτη συνημμένων, νήτη διαζευγμένων, υπάτη μέσων και παραμέση αναφέρονται ως ονόματα διαστημάτων, τότε καλώς για το συμβολισμό τους χρησιμοποιεί ο Ευκλείδης ζεύγος γραμμάτων, δηλαδή αβ, γβ, βδ, εβ, ζβ, ηβ, γβ, κβ. Αν, όμως, αναφέρονται ως

ονόματα φθόγγων, τότε θα έπρεπε να χρησιμοποιήσει ο Ευκλείδης απλά γράμματα και για τις συγκεκριμένες περιπτώσεις τα γράμματα:

α αντί αβ	αβ	βόμβυξ	α αντί αβ προσλαμβανόμενος
γ αντί γβ	αβ:γβ=4:3	επίτριτος	γ αντί γβ υπάτων διάτονος
δ αντί βδ	αβ:βδ=2:1		δ αντί βδ μέση
ε αντί εβ	αβ:εβ=4:1		ε αντί εβ νήτη υπερβολαίων
ζ αντί ζβ	γβ:ζβ=2:1		ζ αντί ζβ νήτη συνημμένων
η αντί ηβ	δβ:ηβ=3:2	ημιόλιος	η αντί ηβ νήτη διαζευγμένων
θ αντί θβ	θβ:ηβ=2:1	διαπασών	θ αντί θβ υπάτη μέσων
κ αντί κβ	θκ:κβ=3:2	ημιόλιος	κ αντί κβ παραμέση
λ αντί λβ	κβ:λβ=1:1		λ αντί λβ υπάτη βαρεία

<u>ΠΡΟΤΑΣΗ 20</u>

«Λοιπὸν δὴ τοὺς φερομένους λαβεῖν».

«ἔτεμον τὸν ΕΒ εἰς ὀκτὼ καὶ ἑνὶ αὐτῶν ἴσον ἔθηκα τὸν ΕΜ, ὥστε τὸν ΜΒ τοῦ ΕΒ γενέσθαι ἐπόγδοον. καὶ πάλιν διελὼν τὸν ΜΒ εἰς ὀκτὼ ἑνὶ αὐτῶν ἴσον ἔθηκα τὸν ΝΜ· τόνῳ ἄρα βαρύτερος ἔσται ὁ ΝΒ τοῦ ΒΜ, ὁ δὲ ΜΒ τοῦ ΒΕ, ὥστε ἔσται μὲν ὁ ΝΒ τρίτη ὑπερβολαίων, ὁ δὲ ΜΒ ὑπερβολαίων διάτονος. ἔλαβον τοῦ ΝΒ τρίτον μέρος καὶ ἔθηκα τὸν ΝΞ, ὥστε τὸν ΞΒ τοῦ ΝΒ εἶναι ἐπίτριτον καὶ διὰ τεσσάρων συμφωνεῖν ἐπὶ τὴν βαρύτητα καὶ γενέσθαι τὸν ΞΒ τρίτην διεζευγμένων. πάλιν τοῦ ΞΒ λαβὼν ἥμισυ μέρος ἔθηκα τὸν ΞΟ, ὥστε διὰ πέντε συμφωνεῖν τὸν ΟΒ πρὸς τὸν ΞΒ· ὁ ἄρα ΟΒ ἔσται παρυπάτη μέσων. καὶ τῷ ΞΟ ἴσον ἔθηκα τὸν ΟΠ, ὥστε γενέσθαι τὸν ΠΒ παρυπάτην ὑπάτων. ἔλαβον δὴ τοῦ ΒΓ τέταρτον μέρος τὸν ΓΡ, ὥστε γενέσθαι τὸν ΡΒ μέσων διάτονον».

<u>Μετάφραση</u>

Πρέπει, λοιπόν, να λάβουμε (επάνω στον κανόνα) τους φερομένους (κινούμενους) φθόγγους.

Έκοψα το τμήμα εβ σε οκτώ ίσα τμήματα και έθεσα το εμ ίσο με ένα απ' αυτά, ώστε το μβ να γίνει επόγδοο του εβ (εννοεί ο Ευκλείδης ως προς τα μήκη των δονούμενων τμημάτων της χορδής).

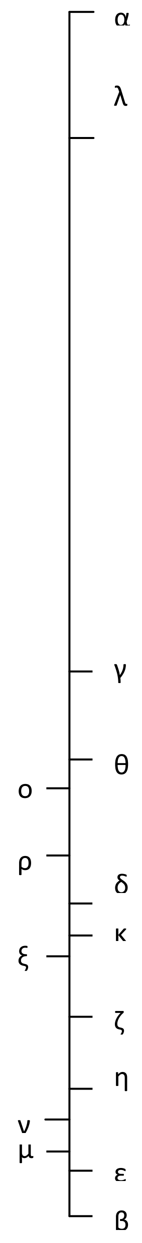
Και πάλι διαιρώντας το τμήμα μβ σε οκτώ ίσα τμήματα, έθεσα το νμ ίσο μ’ ένα από αυτά. Άρα κατά διάστημα τόνου είναι βαρύτερος ο νβ (εννοεί ο Ευκλείδης τον φθόγγο που παράγεται από το δονούμενο τμήμα νβ της χορδής) από το βμ (εννοεί ο Ευκλείδης τον φθόγγο που παράγεται από το δονούμενο τμήμα βμ της χορδής) καθώς και ο μβ (εννοεί ο Ευκλείδης τον φθόγγο που παράγεται από το δονούμενο τμήμα μβ της χορδής) από τον βε (εννοεί ο Ευκλείδης τον φθόγγο που παράγεται από το δονούμενο τμήμα βε της χορδής), ώστε θα είναι ο μεν νβ τρίτη υπερβολαίων, ο δε μβ υπερβολαίων διάτονος.

Πήρα το $\frac{1}{3}$ του τμήματος νβ και τοποθέτησα τον νξ, ώστε ο ξβ να είναι επίτριτος του νβ (εννοεί ο Ευκλείδης ως προς τα μήκη των δονούμενων τμημάτων της χορδής) και, όσον αφορά στη βαρύτητα, να δημιουργούν τη «διά τεσσάρων» συμφωνία και καθίσταται ο ξβ τρίτη διαζευγμένων.

Πάλι παίρνοντας το μισό του τμήματος ξβ, τοποθέτησα τον ξο, ώστε ο οβ ως προς τον ξβ να δημιουργούν τη «δια πέντε» συμφωνία. Άρα ο οβ θα είναι η παρυπάτη μέσων.

Και τοποθέτησα το οπ ίσο με το ξο, ώστε να γίνει ο πβ παρυπάτη υπάτων.

Πήρα, λοιπόν, τον γρ ίσον προς το $\frac{1}{4}$ του βγ, ώστε να γίνει ο ρβ μέσων διάτονος[57].



ΣΧΟΛΙΑ (Χ. Σπυρίδης)

57. Τα Θεωρήματα 19 και 20 μας καθοδηγούν στο να υπολογίσουμε επακριβώς τα μήκη οποιωνδήποτε τμημάτων της χορδής, να σχεδιάσουμε σωστά ένα διάγραμμα του κανόνα και, τέλος, να προχωρήσουμε στην κατασκευή του κανόνα με τα τάστα στην πρέπουσα θέση. Για τη σχεδιαστική διαίρεση ενός ευθύγραμμου τμήματος σε κ το πλήθος ίσα ευθύγραμμα τμήματα, πρέπει να έχουμε υπόψη μας το εξής θεώρημα του Θαλή: «Εάν τμήματα ευθείας γραμμής, που περιέχονται ανάμεσα σε παράλληλες ευθείες γραμμές, είναι ίσα, τότε και τα τμήματα οποιασδήποτε άλλης

ευθείας γραμμής, που περιέχονται ανάμεσα σε αυτές τις παράλληλες ευθείες, είναι ίσα». Κατά την υπολογιστική διαδικασία αντιμετωπίζονται τα διάφορα μήκη των τμημάτων της χορδής ως κλάσματα του όλου μήκους αυτής.

Με τα όσα αναφέρονται στην Πρόταση 19, προκύπτουν οι εξής πληροφορίες αναφορικά με τα μήκη των τμημάτων της χορδής αβ ανάμεσα στους εστώτες φθόγγους του αμετάβολου συστήματος των αρχαίων Ελλήνων.

Έστω $\alpha\beta = x$ (1)

Ενέργεια 1η: $\alpha\gamma = \gamma\delta = \delta\varepsilon = \varepsilon\beta = \frac{\alpha\beta}{4} = \frac{x}{4}$ (2)

$\gamma\beta = \frac{3}{4}\alpha\beta = \frac{3}{4}x$ (3)

Ενέργεια 2η και σχέση (3) $\Rightarrow \gamma\zeta = \zeta\beta = \frac{\gamma\beta}{2} = \frac{3}{8}x$ (4)

σχέση (2) $\Rightarrow \delta\beta = \frac{x}{2}$ (5)

Ενέργεια 3η και σχέση (5) $\Rightarrow \delta\eta = \frac{1}{3}\delta\beta = \frac{1}{3}\cdot\frac{x}{2} = \frac{x}{6}$ (6)

σχέση (5) και (6) $\Rightarrow \eta\beta = \frac{2}{3}\delta\beta = \frac{2}{3}\cdot\frac{x}{2} = \frac{x}{3}$ (7)

Ενέργεια 4η και σχέση (7) $\Rightarrow \eta\theta = \eta\beta = \frac{x}{3}$ (8)

σχέση (8) $\Rightarrow \theta\beta = \theta\eta + \eta\beta = \frac{x}{3} + \frac{x}{3} = \frac{2x}{3}$ (9)

Ενέργεια 5η και σχέση (9) $\Rightarrow \theta\kappa = \frac{1}{3}\theta\beta = \frac{1}{3}\cdot\frac{2x}{3} = \frac{2x}{9}$
(10)

σχέση (9) και (10) $\Rightarrow \kappa\beta = \theta\beta - \theta\kappa = \frac{2x}{3} - \frac{2x}{9} = \frac{4x}{9}$ (11)

Ενέργεια 6η και σχέση (11) $\Rightarrow \lambda\kappa = \kappa\beta = \frac{4x}{9}$ (12)

σχέση (1), (12) και (11) $\Rightarrow \alpha\lambda = \alpha\beta - \lambda\beta = \alpha\beta - (\lambda\kappa + \kappa\beta) = x - \frac{8x}{9} = \frac{x}{9}$ (13)

σχέση (2) και (13) $\Rightarrow \lambda\gamma = \alpha\gamma - \alpha\lambda = \frac{x}{4} - \frac{x}{9} = \frac{5x}{36}$ (14)

σχέση (3) και (9) $\Rightarrow \gamma\theta = \gamma\beta - \theta\beta = \frac{3x}{4} - \frac{2x}{3} = \frac{x}{12}$ (15)

σχέση (2) και (15) $\Rightarrow \theta\delta = \gamma\delta - \gamma\theta = \frac{x}{4} - \frac{x}{12} = \frac{x}{6}$ (16)

σχέση (10) και (16) $\Rightarrow \delta\kappa = \theta\kappa - \theta\delta = \frac{2x}{9} - \frac{x}{6} = \frac{x}{18}$ (17)

σχέση (4), (15), (16), (17) $\Rightarrow \kappa\zeta = \gamma\zeta - (\gamma\theta + \theta\delta + \delta\kappa) = \frac{3x}{8} - \left(\frac{x}{12} + \frac{x}{6} + \frac{x}{18}\right) = \frac{5x}{72}$ (18)

σχέση (16), (17) και (18) $\Rightarrow \zeta\eta = \delta\eta - (\delta\kappa + \kappa\zeta) = \frac{x}{6} - \left(\frac{x}{18} + \frac{5x}{72}\right) = \frac{x}{6} - \frac{9x}{72} = \frac{x}{24}$ (19)

σχέση (7) και (2) $\Rightarrow \eta\varepsilon = \eta\beta - \varepsilon\beta = \frac{x}{3} - \frac{x}{4} = \frac{x}{12}$ (20)

σχέση (19) και (7) $\Rightarrow \zeta\beta = \zeta\eta + \eta\beta = \frac{x}{24} + \frac{x}{3} = \frac{3x}{8}$ (21)

σχέση (17) και (12) $\Rightarrow \delta\beta = \delta\kappa + \kappa\beta = \frac{x}{18} + \frac{4x}{9} = \frac{x}{2}$ (22)

σχέση (15) και (9) $\Rightarrow \gamma\beta = \gamma\theta + \theta\beta = \frac{x}{12} + \frac{2x}{3} = \frac{3x}{4}$ (23)

σχέση (14) και (3) $\Rightarrow \lambda\beta = \lambda\gamma + \gamma\beta = \frac{5x}{36} + \frac{3x}{4} = \frac{8x}{9}$ (24)

Για τα μήκη των μη δονούμενων τμημάτων της χορδής (θέσεις τάστων) ισχύουν οι σχέσεις:

σχέση (13) $\Rightarrow \alpha\lambda = \frac{x}{9} = \frac{8}{72}x$ (25)

σχέση (1) και (3) $\Rightarrow \alpha\gamma = \alpha\beta - \beta\gamma = x - \frac{3x}{4} = \frac{x}{4} = \frac{18}{72}x$ (26)

σχέση (1) και (9) $\Rightarrow \alpha\theta = \alpha\beta - \beta\theta = x - \frac{2x}{3} = \frac{x}{3} = \frac{24}{72}x$ (27)

σχέση (1) και (5) $\Rightarrow \alpha\delta = \alpha\beta - \beta\delta = x - \frac{x}{2} = \frac{x}{2} = \frac{36}{72}x$ (28)

σχέση (1) και (11) $\Rightarrow \alpha\kappa = \alpha\beta - \beta\kappa = x - \frac{4x}{9} = \frac{5x}{9} = \frac{40}{72}x$ (29)

σχέση (1) και (4) $\Rightarrow \alpha\zeta = \alpha\beta - \beta\zeta = x - \frac{3x}{8} = \frac{5x}{8} = \frac{45}{72}x$ (30)

σχέση (1) και (7) $\Rightarrow \alpha\eta = \alpha\beta - \beta\eta = x - \frac{x}{3} = \frac{2x}{3} = \frac{48}{72}x$ (31)

σχέση (1) και (2) $\Rightarrow \alpha\varepsilon = \alpha\beta - \beta\varepsilon = x - \frac{x}{4} = \frac{3x}{4} = \frac{54}{72}x$ (32)

σχέση (1) $\Rightarrow \alpha\beta = x = \frac{72}{72}x$ (33)

Έχουμε ως παρονομαστές τους αριθμούς: $9 = 3^2,\ 4 = 2^2,\ 3 = 3^1,\ 2 = 2^1,\ 8 = 2^3$, των οποίων το Ε.Κ.Π. είναι το $2^3 \cdot 3^2 = 72$. Συνεπώς, όλα τα μήκη των οποιωνδήποτε τμημάτων της χορδής κάλλιστα θα μπορούσαν να εκφρασθούν σε ακέραια πολλαπλάσια του $\frac{1}{72}$ του μήκους ολόκληρης της χορδής.

Οι πληροφορίες από το Θεώρημα 20 οδηγούν στον υπολογισμό των τμημάτων της χορδής που σχετίζονται με τους εστώτες και με τους φερόμενους φθόγγους του αμετάβολου συστήματος των αρχαίων Ελλήνων.

Ενέργεια 7η και σχέση (2) $\Rightarrow \varepsilon\mu = \frac{\varepsilon\beta}{8} = \frac{1}{8} \cdot \frac{x}{4} = \frac{x}{32}$ (34)

σχέση (34) και (2) $\Rightarrow \mu\beta = \mu\varepsilon + \varepsilon\beta = \frac{x}{32} + \frac{x}{4} = \frac{9x}{32}$ (35)

Ενέργεια 8η και σχέση (35) $\Rightarrow \mu\nu = \frac{\mu\beta}{8} = \frac{1}{8} \cdot \frac{9x}{32} = \frac{9x}{256}$ (36)

σχέση (36) και (35) $\Rightarrow \nu\beta = \nu\mu + \mu\beta = \frac{9x}{256} + \frac{9x}{32} = \frac{81x}{256}$ (37)

Ενέργεια 9η και σχέση (37) $\Rightarrow \nu\xi = \frac{1}{3}\nu\beta = \frac{1}{3} \cdot \frac{81x}{256} = \frac{27x}{256}$ (38)

σχέση (38) και (37) $\Rightarrow \xi\beta = \xi\nu + \nu\beta = \frac{27x}{256} + \frac{81x}{256} = \frac{108x}{256}$ (39)

Ενέργεια 10η και σχέση (39) $\Rightarrow \xi o = \frac{\xi\beta}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{108x}{256} = \frac{54x}{256}$ (40)

Ενέργεια 11η και σχέση (40) $\Rightarrow o\pi = o\xi = \frac{54x}{256}$ (41)

Ενέργεια 12η και σχέση (3) $\Rightarrow \gamma\rho = \frac{1}{4}\beta\gamma = \frac{1}{4} \cdot \frac{3x}{4} = \frac{3x}{16}$ (42)

σχέση (20),(36) και (34) $\Rightarrow \eta\nu = \eta\varepsilon - \nu\varepsilon = \eta\varepsilon - (\nu\mu + \mu\varepsilon) = \frac{x}{12} - \left(\frac{9x}{256} + \frac{x}{32}\right) = \frac{13x}{768}$

(43)

σχέση (38), (19) και (43) $\Rightarrow \xi\zeta = \xi\nu - (\zeta\eta + \eta\nu) = \frac{27x}{256} - \left(\frac{x}{24} + \frac{13x}{768}\right) = \frac{3x}{64}$

(44)

σχέση (18) και (44) $\Rightarrow \kappa\xi = \kappa\zeta - \xi\zeta = \frac{5x}{72} - \frac{3x}{64} = \frac{13x}{576}$ (45)

σχέση (2) και (42) $\Rightarrow \rho\delta = \gamma\delta - \gamma\rho = \frac{x}{4} - \frac{3x}{16} = \frac{x}{16}$ (46)

σχέση (40) και (39) $\Rightarrow o\beta = o\xi + \xi\beta = \frac{\xi\beta}{2} + \xi\beta = \frac{3}{2}\xi\beta = \frac{3}{2} \cdot \frac{108x}{256} = \frac{81x}{128}$ (47)

σχέση (47),(46) και(5) $\Rightarrow o\rho = o\beta - (\rho\delta + \delta\beta) = \frac{81x}{128} - \left(\frac{x}{16} + \frac{x}{2}\right) = \frac{9x}{128}$ (48)

σχέση (9) και (47) $\Rightarrow \theta o = \theta\beta - \beta o = \frac{2x}{3} - \frac{81x}{128} = \frac{13x}{384}$ (49)

σχέση (41) και (39) $\Rightarrow \pi\beta = \pi o + o\xi + \xi\beta = \frac{54x}{256} + \frac{54x}{256} + \frac{108x}{256} = \frac{27x}{32}$ (50)

σχέση (50) και (23) $\Rightarrow \pi\gamma = \pi\beta - \gamma\beta = \frac{27x}{32} - \frac{24x}{32} = \frac{3x}{32}$ (51)

σχέση (14) και (51) $\Rightarrow \lambda\pi = \lambda\gamma - \pi\gamma = \frac{5x}{36} - \frac{3x}{32} = \frac{13x}{288}$ (52)

σχέση (34) και (2) $\Rightarrow \mu\beta = \mu\varepsilon + \varepsilon\beta = \frac{x}{32} + \frac{x}{4} = \frac{9x}{32}$ (53)

σχέση (43) και (37) $\Rightarrow \eta\beta = \eta\nu + \nu\beta = \frac{13x}{768} + \frac{81x}{256} = \frac{x}{3}$ (54)

σχέση (44) και (21) $\Rightarrow \xi\beta = \xi\zeta + \zeta\beta = \frac{3x}{64} + \frac{3x}{8} = \frac{27x}{64}$ (55)

σχέση (17) και (11) $\Rightarrow \delta\beta = \delta\kappa + \kappa\beta = \frac{x}{18} + \frac{4x}{9} = \frac{x}{2}$ (56)

σχέση (46) και (56) $\Rightarrow \rho\beta = \rho\delta + \delta\beta = \frac{x}{16} + \frac{x}{2} = \frac{9x}{16}$ (57)

σχέση (49) και (47) $\Rightarrow \theta\beta = \theta o + o\beta = \frac{13x}{384} + \frac{81x}{128} = \frac{2x}{3}$ (58)

σχέση (51) και (3) $\Rightarrow \pi\beta = \pi\gamma + \gamma\beta = \frac{3x}{32} + \frac{3x}{4} = \frac{27x}{32}$ (59)

Για τα μήκη των μη δονούμενων τμημάτων της χορδής (θέσεις των τάστων) ισχύουν οι σχέσεις:

σχέση (13) $\Rightarrow \alpha\lambda = \frac{x}{9}$

σχέση (1) και (59) $\Rightarrow \alpha\pi = \alpha\beta - \beta\pi = x - \frac{27x}{32} = \frac{5x}{32}$ (60)

σχέση (26) $\Rightarrow \alpha\gamma = \frac{x}{4}$

σχέση (27) $\Rightarrow \alpha\theta = \frac{x}{3}$

σχέση (1) και (47) $\Rightarrow \alpha o = \alpha\beta - \beta o = x - \frac{81x}{128} = \frac{47x}{128}$ (61)

σχέση (1) και (57) $\Rightarrow \alpha\rho = \alpha\beta - \beta\rho = x - \frac{9x}{16} = \frac{7x}{16}$ (62)

σχέση (28) $\Rightarrow \alpha\delta = \frac{x}{2}$

σχέση (29) $\Rightarrow \alpha\kappa = \frac{5x}{9}$

σχέση (1) και (55) $\Rightarrow \alpha\xi = \alpha\beta - \beta\xi = x - \frac{27x}{64} = \frac{37x}{64}$ (63)

σχέση (30) $\Rightarrow \alpha\zeta = \frac{5x}{8}$

σχέση (31) $\Rightarrow \alpha\eta = \frac{2x}{3}$

σχέση (1) και (37) $\Rightarrow \alpha\nu = \alpha\beta - \beta\nu = x - \frac{81x}{256} = \frac{175x}{256}$ (64)

σχέση (1) και (35) $\Rightarrow \alpha\mu = \alpha\beta - \beta\mu = x - \frac{9x}{32} = \frac{23x}{32}$ (65)

σχέση (32) $\Rightarrow \alpha\varepsilon = \frac{3x}{4}$

σχέση (1) $\Rightarrow \alpha\beta = x$

Ο Στόχος του Έργου

Με μια πρώτη ματιά, ο γενικός στόχος του έργου είναι να θεμελιώσει, μέσω της θεωρίας λόγων, ένα σύστημα μέτρησης με το οποίο οι τόνοι να μπορούν επακριβώς να καθοριστούν κι επομένως, να δώσει μια ακριβή μαθηματική περιγραφή των σχέσεων μεταξύ των νοτών της κλίμακας. Αυτό που αξίζει να σημειωθεί είναι ότι οι σχέσεις μεταξύ των τόνων δεν είναι επακριβώς μετρήσιμες με το αυτί. Οι προσπάθειες των «αρμονικών» να εγκαθιδρύσουν μια ακουστική μονάδα μέτρησης απέτυχε. Έτσι, αν πρέπει να επιτευχθεί ακρίβεια, πρέπει να βρεθεί ένας τρόπος μεταφοράς των σχέσεων των τόνων από το ακουστικό πεδίο στο οπτικό, όπου είναι διαθέσιμα αποδεκτά μέτρα. Κι αυτό ακριβώς είναι που επιτυγχάνει το σύστημα των λόγων υπό τους όρους των λόγων χορδών που κατοικούν στο οπτικό πεδίο.

Έτσι, η *«Κατατομή Κανόνος»* προορίζεται για τον θεωρητικό. Ο σκοπός της είναι να μεταφράσει το σύστημα της κλίμακας από ένα πλαίσιο ορολογιών και εννοιών σε ένα άλλο, από ένα σχήμα οιονεί – γραμμικών και ακουστικών σχέσεων σε ένα σχήμα αριθμητικών και γεωμετρικών λόγων.

Κατά τον Barker, ο πραγματικός σκοπός του έργου είναι απλά να δώσει τη δυνατότητα στο αντικείμενο της μουσικής να αντιμετωπιστεί με ακρίβεια από τον μαθηματικό φιλόσοφο, ή από φιλοσόφους κάθε είδους. Δεν υπάρχει αμφιβολία ότι ένα μέρος του πυθαγόρειου προγράμματος σχετίζει τα μουσικά φαινόμενα με φαινόμενα άλλων επιστημονικών πεδίων, ιδίως με αυτά της αστρονομίας. Για να γίνει αυτό, πρέπει αμφότερα να εκφρασθούν με κοινή ορολογία, η οποία να παρέχεται από τα μαθηματικά των λόγων. Ωστόσο, το θέμα ίσως είναι γενικότερο. Θα λέγαμε ότι η κλίμακα πρέπει να είναι εκ των προτέρων καθορισμένη με μέσα που εξαρτώνται ουσιαστικά από το αυτί. Όμως, αυτά τα μέσα, όπως λέει και ο Αριστόξενος, είναι αρμοδιότητα του ειδικού μουσικού. Δεν υπάρχει κάποιο ακουστικό μέτρο σε μορφή ράβδου με το οποίο όλα τα λογικά και ευαίσθητα πλάσματα να είναι προικισμένα. Αλλά οι λόγοι και οι σχέσεις τους εμπίπτουν στην αρμοδιότητα της αιτίας. Έτσι η μετάφραση δεν γίνεται απαραίτητα από το ανακριβές στο ακριβές, αλλά μάλλον από το ειδικό και εσωτερικό σε μια γλώσσα όπου η ικανότητα καθορισμού των όρων δεν εξαρτάται από μια φοβερή βιολογική ικανότητα ή από ένα ιδιαίτερο είδος εκπαίδευσης, αλλά από την καθολική δύναμη της αιτίας. Αν αυτός είναι ο σκοπός του έργου, τότε είναι πολύτιμος και δίνει ένα ικανοποιητικό νόημα στον ισχυρισμό ότι οι Πυθαγόρειοι εκτιμούσαν την αιτία περισσότερο από την αντίληψη, ως κριτήριο μουσικής κρίσης, ένα νόημα που δεν απαιτεί την απόρριψη των δεδομένων της αντίληψης, από τα οποία πρέπει να ξεκινήσει οπωσδήποτε το έργο τους.

Συμπερασματικά, η αντίληψη φαίνεται να είναι αντιμέτωπη με την αιτία σε δύο βασικές περιοχές. Η πρώτη σχετίζεται με την άρνηση ότι η οκτάβα είναι ακριβώς έξι τόνοι, ότι ο τόνος μπορεί να διαιρεθεί ακριβώς στη μέση κλπ. Όμως, αυτές οι προτάσεις δεν απαρνούνται αυτό που η αντίληψη απαιτεί. Η αντίληψη δύσκολα μπορεί να θεωρηθεί τόσο ακριβής, ώστε να μπορεί να ορίσει αν αυτές οι διαφορές υπάρχουν ή όχι. Οι πυθαγόρειοι ισχυρισμοί είναι σημαντικοί, όχι γιατί δείχνουν ότι η αντίληψη είναι λανθασμένη, αλλά γιατί δείχνουν ότι η αντίληψη δεν μπορεί να κάνει λεπτές διακρίσεις, κάτι που η αιτία μπορεί, και ότι όπου εμφανίζεται θέμα αντιστροφής, τα πράγματα γίνονται λιγότερο αξιόπιστα. Το δεύτερο σημείο αντιπαράθεσης βρίσκεται στην κατά μέτωπο σύγκρουση μεταξύ των δύο σχολών, σχετικά με το διάστημα της οκτάβας και μια τετάρτη. Εδώ η αντιπαράθεση είναι ευθεία, μια και η αντίληψη των ειδικών – στην οποία βασίζεται η βασική λίστα σύμφωνων διαστημάτων και για τις δύο μεριές – είναι ομόφωνη στην αποδοχή ως σύμφωνου ενός διαστήματος που η αιτία απορρίπτει.

Ωστόσο, οι απόψεις που στηρίζει το πρόγραμμα των Πυθαγορείων είναι ακαταμάχητες. Τα μαθηματικά μπορούν να συσχετιστούν όχι μόνο με την αστρονομία, αλλά, όπως ισχυρίζεται και ο Τίμαιος, μπορούν να αποτελέσουν το συνδετικό κρίκο μεταξύ της μουσικής και της ψυχής κι επομένως, μεταξύ της μουσικής και αυτών των ηθικών αντιλήψεων με τις οποίες οι φιλόσοφοι του παρελθόντος τα είχαν συνδέσει επίμονα. Η ουσιαστική αντικειμενική σκοπιά θα μπορούσε να είναι ένα μαθηματικά αποδείξιμο σύστημα ηθικών.

Αναφορές

- Barbera Andrew (1977). «Arithmetic and Geometric Divisions of the Tetrachord». *Journal of Music Theory,* Vol. 21, No. 2, pp. 294-323
- Barbera Andrew (1981). «Republic 530c-531c: Another Look at Plato and the Pythagoreans». *The American Journal of Philology,* Vol. 102, No 4, pp. 395-410
- Barbera Andrew (1984). «The Consonant Eleventh and the Expansion of the Musical Tetractys: A Study of Ancient Pythagoreanism». *Journal of Music Theory,* Vol. 28, pp. 191-223
- Barbera Andrew (1984). «Placing Sectio Canonis in Historical and Philosophical Contexts». *The Journal of Hellenic Studies,* Vol. 104, pp. 157-161
- Barbera Andrew (1981). «Interpreting an Arithmetical Error in Boethius's De Institutione Musica». *Archives Internationales des Sciences,* Vol. 31, pp. 40-41
- Barbera Andrew (1991). «The Euclidean division of the Canon». *University of Nebraska Press, Lincoln*
- Barker Andrew (1984). «Greek Musical Writings I, The Musician and his Art». *Cambridge University Press.*
- Barker Andrew (1989). «Greek Musical Writings II, Harmonic and Acoustic Theory». *Cambridge University Press.*
- Barker Andrew (1978). «A Study in Aristoxenus». *The Journal of Hellenic Studies,* Vol. 98, pp. 9-16
- Barker Andrew (1981). «Methods and Aims in the Euclidean Sectio Canonis». *The Journal of Hellenic Studies,* Vol. 101, pp. 1-16
- Barker Andrew (1978). «Symfwnoi Arithmoi: A Note on Republic $531c_{1-4}$». *Classical Philology,* Vol. 73, No 4, pp. 337-342
- Burkert W (1972). «Lore and Science in Ancient Pythagoreanism». *Cambridge Mass., Harvard Univ. Press.*
- Burnyeat M.F. (1978) «The philosophical sense of Theaetetus'mathematics». *Isis 69*, pp. 489–513
- Borzacchini Luigi (2007). «Incommensurability, Music and Continuum: A Cognitive Approach». *Arch. Hist. Exact Sci. 61*, pp. 273–302
- Crocker L. Richard (1963). «Pythagorean Mathematics and Music». *The Journal of Aestetics and Art Criticism*, Vol. 22, No. 2, pp. 189-198
- Crocker L. Richard (1964). «Pythagorean Mathematics and Music». *The Journal of Aestetics and Art Criticism*, Vol. 22, No. 3, pp. 325-335
- Fowler D.H. (1987). «The mathematics of Plato's academy». *Oxford, Clarendon Press*
- Heath, T.L. (1956). «Euclid. The Thirteen Books of the Elements». *NewYork, Dover Publications*
- Huffman A. Carl (1985). «The Authenticity of Archytas Fr.1». *The Classical Quarterly, New Series,* Vol. 35, No 2, pp. 344-348
- James Jamie (1944). «The Music of the Spheres». *Little, Brown and Company.*
- Knorr W. (1975). «The evolution of the Euclidean Elements». *Εκδόσεις Dordrecht, Reidel*

- Litchfield Malcom (1988). «Aristoxenus and Empiricism: A Reevaluation based on his theories». *Journal of Music Theory,* Vol. 32, No. 1, pp. 51-73
- Mathiesen Thomas (1975). «An Annotated Translation of Euclid's Division of a Monochord». *Journal of Music Theory,* Vol. 19, pp. 236-258
- Nagy Denes (2007). «Forma, Harmonia and Symmetria (with an Appendix on Sectio Aurea): A Middle and South American Challenge». *Form and Symmetry: Art and Science, Buenos Aires Congress*
- S. Negrepontis (2000). «The Anthyphairetic nature of Plato's Dialectics» *Proceeedings 51th International Conference CIEAEM, 21-26 July 1999, University College, Chichester, England*
- S. Negrepontis (1997) «Plato's dialectic under the anthyphairetic scrutiny» *Lectures, academic year 1996-97, Philosophy Group of the University of Cyprus, edited by V. Syros, A. Kouris, E. Kalokairinou, Nicosia*
- S. Negrepontis (1997). «The Pythagoreans: From Harmony to the Irrational». *A. Katavolos (ed.), Operator Algebras and Applications, pp. 355 - 387*
- Proclus (1970). «A Commentary on the first Book of Euclid's Elements». Morrow, G.R. ed., Princeton University Press
- Reitman Boris (2005). «History of Mathematical Approaches to Western Music», pp. 5-9
- Szabo, Arpad. (1978). «The Beginnings of Greek Mathematics». *Εκδόσεις Dordrecht, Reidel*
- Tannery, Paul (1902). «Du role de la musique grecque dans le development de la mathematique pure». *Memoire Scientifique,* Vol. 3, pp. 68–89
- Winnington – Ingram, R. P. (1932). «Aristoxenus and the intervals of Greek Music». *Classical Quarterly 26*, pp.195-208
- Whone Herbert (1994). «Το κρυφό πρόσωπο της Μουσικής», *pp. 117-118*
- Van der Waeden (1979). «Die Pythagoreer». *Zurich*, p.p. 473
- Von Jan K. (CarolusJanus) (1895). «Musici Scriptores Graeci». *Leipzig*
- Βέικος Θ. (1988). «Οι Προσωκρατικοί». *Εκδόσεις Ζαχαρόπουλος*
- Καϊμάκης Παύλος (2004). «Φιλοσοφία και Μουσική. Η Μουσική στους Πυθαγορείους, τον Πλάτωνα, τον Αριστοτέλη και τον Πλωτίνο». *Εκδόσεις «Μεταίχμιο»*
- Μιχαηλίδης Σόλων (1989). «Εγκυκλοπαίδειατης Αρχαίας Ελληνικής Μουσικής». *Μορφωτικό Ίδρυμα Εθνικής Τραπέζης*
- Σπυρίδης Χαράλαμπος (1998). «Ευκλείδου Κατατομή Κανόνος». *Εκδόσεις «Λ. Γεωργιάδης» 1996-1998*
- Σταμάτης Σ. Ευάγγελος (1953). «Ευκλείδου Γεωμετρία, Θεωρία Αριθμών. Στοιχείων βιβλία V. VI. VII. VIII. IX. ». *Οργανισμός εκδόσεων σχολικών βιβλίων,* Τόμος ΙΙ.
- Σταμάτης Σ. Ευάγγελος (1966). «Συμβολή εις την ερμηνείαν μουσικού χωρίου του διαλόγου του Πλάτωνος Τίμαιος». *Ανάτυπον εκ του περιοδικού «ΠΛΑΤΩΝ», τόμ. ΙΗ΄, τεύχη 35/36*
- Ταίηλορ Νέστωρ (2000). «Η Μαθηματική έννοια της Αρμονίας στο Μουσικό Σύστημα των Πυθαγορείων». *Εκδόσεις Νεφέλη*